❦ 6. 合成関数の微分法　　　　　　　　　　　　　２０１５年度後期　微分積分Ｉ（火曜２限）

1 ２つの関数 $y = f(u)$ と $u = g(x)$ の合成関数 $y = f\big(g(x)\big)$ の導関数を求めたい．
いま，x の増分 Δx に対し，u の増分 Δu は $\Delta u = g(x+\Delta x) - g(x)$ と表せるが，これより

$$g(x+\Delta x) = u + \Delta u \qquad (*)$$

となる．一方，$y = f\big(g(x)\big)$ の導関数 $\Big(f\big(g(x)\big)\Big)'$ は

$$\Big(f\big(g(x)\big)\Big)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f\big(g(x+\Delta)\big) - f\big(g(x)\big)}{\Delta x}$$

で定義される．ここで，$(*)$ を用いて

$$\frac{f\big(g(x+\Delta)\big) - f\big(g(x)\big)}{\Delta x} = \frac{f(u+\Delta u) - f(u)}{\Delta x}$$

と書き直す．そして，

$$\lim_{\Delta u \to 0} \frac{f(u+\Delta u) - f(u)}{\Delta u} = f'(u)$$

であることを考えて，少々無理やりに Δu を間に入れて

$$\frac{f(u+\Delta u) - f(u)}{\Delta x} = \frac{f(u+\Delta u) - f(u)}{\boxed{}} \cdot \frac{\boxed{}}{\Delta x}$$

と書き直す．さらに，$\Delta u = g(x+\Delta x) - g(x)$ を用いて分子の Δu を書き直すことにより，

$$\frac{f\big(g(x+\Delta)\big) - f\big(g(x)\big)}{\Delta x} = \frac{f(u+\Delta u) - f(u)}{\Delta u} \cdot \frac{\boxed{}}{\Delta x}$$

を得る．いま，$\Delta x \to 0$ としたとき $\Delta u \to 0$ だから，

$$\begin{aligned}
\Big(f\big(g(x)\big)\Big)' &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f\big(g(x+\Delta x)\big) - f\big(g(x)\big)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{f(u+\Delta u) - f(u)}{\Delta u} \cdot \frac{\boxed{}}{\Delta x} \right) \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(u+\Delta u) - f(u)}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\boxed{}}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta u \to 0} \frac{f(u+\Delta u) - f(u)}{\Delta u} \cdot \boxed{} \\
&= f'(u) \cdot \boxed{}
\end{aligned}$$

ここで，$u = g(x)$ だから，$f'(u) = \boxed{}$ と書き直せるので，合成関数の微分公式

$$\Big(f\big(g(x)\big)\Big)' = \boxed{}$$

を得る．

学籍番号：＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿　　氏名：＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

【裏に続く】

$\boxed{2}$ $\Big(f\big(g(h(x))\big)\Big)'$ を求めよ.

$\boxed{3}$ 合成関数の微分法を用いて次の関数を変数 x で微分せよ.

a) $f(x) = (2x+3)^3$

$f'(x) =$

b) $f(x) = (x^2 - x + 1)^5$

$f'(x) =$

c) $f(x) = \dfrac{1}{(3x-2)^3}$

$f'(x) =$

d) $f(x) = \left(x^2 - \dfrac{1}{x}\right)^3$

$f'(x) =$

2015 年 11 月 10 日