1 ２つの関数 $u = f(x)$ と $v = g(x)$ の積として表される関数 $y = f(x)g(x)$ の導関数を求めたい.

a) いま，$x$ の増分を $\Delta x$ とすると，$u$ の増分 $\Delta u$ と $v$ の増分 $\Delta v$ はそれぞれ,

$$\Delta u = f(x + \Delta x) - f(x), \qquad \Delta v = g(x + \Delta x) - g(x)$$

と表せる．これより,

$$(*) \qquad f(x + \Delta x) = f(x) + \Delta u, \qquad g(x + \Delta x) = g(x) + \Delta v$$

と書ける．一方，$y$ の増分 $\Delta y$ は

$$\Delta y = f(x + \Delta x)g(x + \Delta x) - f(x)g(x)$$

と表される．この右辺の $f(x + \Delta x)$，$g(x + \Delta x)$ に $(*)$ を代入して展開整理し，$\Delta y$ をなるべく簡単な形にせよ.

b) a) で得られた式の両辺を $\Delta x$ で割って，$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ を求めよ.

c) b) で $\Delta x \to 0$ として $\displaystyle\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}$ を求めたい．そこで，$\displaystyle\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u \Delta v}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \Delta v = \frac{du}{dx} \cdot 0 = 0$ であることを用い，$\dfrac{dy}{dx}$ を，$u, \dfrac{du}{dx}, v, \dfrac{dv}{dx}$ 用いて表せ.

d) c) で求めた式を別の記号法 $\dfrac{dy}{dx} = \big(f(x)g(x)\big)'$，$\dfrac{du}{dx} = f'(x)$，$\dfrac{dv}{dx} = g'(x)$ を用いて書き直し，積の微分公式を求めよ.

$$\big(f(x)g(x)\big)' =$$

2 $f(x)g(x)h(x) = \big(f(x)g(x)\big)h(x)$ であることと積の微分公式を用いて 3 つの関数の積の導関数 $\big(f(x)g(x)h(x)\big)'$ を求めよ.

3 関数 $g(x)$ に対し，関数 $\dfrac{1}{g(x)}$ の導関数 $\left(\dfrac{1}{g(x)}\right)'$ を求めたい.

a) $f(x) = \dfrac{1}{g(x)}$ とおき，$f'(x)$ を求める．分母を払った式 $f(x)g(x) = 1$ の両辺を微分し，左辺の微分に積の微分公式を用い，$f(x)$，$f'(x)$，$g(x)$，$g'(x)$ の間に成り立つ関係式を求めよ.

b) a) で求めた関係式を $f'(x)$ について解き，$f'(x)$ を $f(x)$，$g(x)$，$g'(x)$ で表せ.

c) b) において $f(x)$ を $\dfrac{1}{g(x)}$ で置き換え，$f'(x)$ を $g(x)$ と $g'(x)$ のみで表すことにより，$\left(\dfrac{1}{g(x)}\right)'$ を求めよ.

$$\left(\frac{1}{g(x)}\right)' =$$

【裏に続く】

$\boxed{4}$ $\dfrac{f(x)}{g(x)} = f(x) \times \dfrac{1}{g(x)}$ である．この右辺を積の微分公式を用いて微分し，問題 4 で求めた微分公式を用いることにより，商の微分公式 $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)'$ を求めよ．

a） $f(x) = \dfrac{x-5}{x^2+5}$

$f'(x) =$

b） $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$

$f'(x) =$

c） $f(x) = \dfrac{x}{x^2-x+1}$

$f'(x) =$

d） $f(x) = \dfrac{x^2+5x}{x-4}$

$f'(x) =$

$\boxed{5}$ 次の関数を変数 $x$ で微分せよ．

a） $f(x) = (x^2+3)(x^2-2x+2)$

$f'(x) =$

b） $f(x) = (x^2-x+1)(x+1)$

$f'(x) =$

c） $f(x) = \dfrac{2}{2x-1}$

$f'(x) =$

d） $f(x) = \dfrac{1}{6x^3}$

$f'(x) =$