

統計的検定

まず例として、長年同じ数学の講義を担当している先生が学期末試験をおこなったところ、今年度の学生の平均が従来の学生の平均より 5 点高かったとする。このとき、今年度の学生は例年にくらべて成績優秀と判断してよいだろうか。考え方としては、次の 2 通りがある。

- (1) 5 点ぐらいの差は偶然起こりうるので、今年度の学生も従来の学生と特に変わらない。
- (2) 5 点も平均点が違えば、今年度の学生は従来より成績優秀と考えてしかるべき。

この判断には、毎年の試験の難易度がもちろん関わってくるわけだが、ここでは、この先生は毎年同じ問題を出していたとし、学生も毎年同じ条件で試験を受けていたと仮定する。それでも、この判断を下すには、クラスの数や点数の分散なども考慮しないと行けない。

二つ以上のデータの間の差が偶然によるものか、それとも意味のある差なのかを判断するためには統計的仮説検定 (test, statistical test, hypothesis test) と呼ばれる方法が使われる。統計的仮説検定では、仮説を表現する方法として

帰無仮説 (null hypothesis) 記号 H_0 と
対立仮説 (alternative hypothesis) 記号 H_1 を

対置する方法をとる。帰無仮説をたてるということは、「差がある」ことを確認するために、「差がない」という前提 (仮説) から出発する、つまり「無に帰したい仮説」から出発するということである。たてた仮説を採択する (正しいとみなす) か棄却する (正しくないともみなす) かを、判断する規準を危険率とか有意水準といい、 α で表す。通常 α として 5 % とか 1 % とする、

例 1. 上の例をもう少し具体的にしてみる。例年の試験の平均点は 50 点で、標準偏差は 18.0 点であるとする。今年のクラス 36 名の平均点は 55 点だったとする。このデータのもとに、今年の学生が従来よりできのよい学生の集まりなのかを、危険率 5% で検定してみる。このとき

$$\text{帰無仮説 } H_0 : \mu = 50,$$

$$\text{対立仮説 } H_1 : \mu > 50.$$

とする。対立仮説をこのように $\mu > 50$ とか $\mu < 50$ とおくのを片側検定といい、単に H_0 の否定 $\mu \neq 50$ とするのを両側検定という。

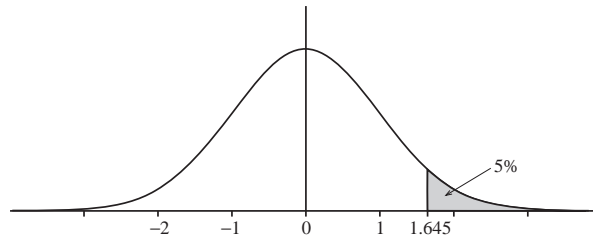
H_0 とは、今年の学生も従来と変わらないと仮定することだから、もしそうだとして試験を行えば、40 人の試験の平均点 \bar{X} は正規分布 $N(\mu, \sigma/n)$ に従うはずである。このとき

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

とおくと、 Z は標準正規分布 $N(0, 1)$ に従う。上のデータをあてはめると

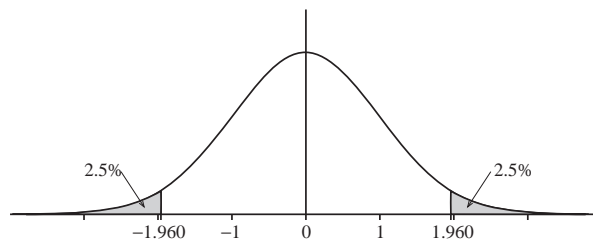
$$Z = \frac{55 - 50}{\frac{18.0}{\sqrt{36}}} = \frac{5}{3} = 1.667$$

となる。ここで次のページのグラフを見ると 1.667 は影を付けた部分に入っている。



これはすなわち、帰無仮説を前提として算出された確率が規準より低い水準（5% 以下）であることを意味し、帰無仮説 H_0 は棄却すべきということになる。これにより、対立仮説 H_1 を採択し「今年の学生は従来より出来がよい」と言えることになる。

なお、両側検定の場合には、上の図の代わりに下の図を使う。



例 2. 硬貨を 4 回投げたら 4 回とも表が出たとき、この硬貨は表が出やすいといえるか。また 5 回投げて 5 回とも表が出た場合はどうか。そこで

$$H_0 : \text{表の出る確率} = 1/2 \quad H_1 : \text{表の出る確率} > 1/2$$

とし、 H_0 を仮定する。すると、硬貨を 4 回投げて 4 回表が出る確率は $(1/2)^4 = 6.25\%$ となる。危険率 5% で考えれば、これは H_0 の棄却域に入らないので、何ともいえないことになる。5 回とも表の場合は確率 3.125% となり、 H_0 は棄却され、この硬貨は表が出やすいといって差し支えなくなる。

練習問題

1 排気量 1800cc として販売されている自動車 20 台について実際の排気量を調べたところ、平均 1811cc であった。排気量の標準偏差が 15.0cc であるとわかっているとして、この標本平均が公称の 1800cc からずれているかどうか、危険率 5% で検定せよ。

2 ボタンを押すと 000~999 の数字が並ぶ機械がある。この機械で 1000 回ボタンを押すと、777 のように 3 つの同じ数字の並ぶ場合が 15 度あった。この機械は 3 つの同じ数字が並びやすいといえるかどうか、危険率 5% で検定せよ。

3 ある電話会社の調査によると、家庭の 1 ヶ月の平均電話回数は 86 回であった。先月、電話料金の改定が行われた。100 軒の家庭についての最近の調査によると、電話の平均回数は 84 回に減少し、その標準偏差は 12 回であった。この結果は料金の改定が電話利用の減少の原因であったという議論を支持しているか。危険率 5% で検定せよ。

4 単三乾電池を製造している会社がある。従来の単三乾電池の寿命は平均 180 時間であった。この会社が開発した新製品は「従来の製品より寿命が長い」と謳っている。これを検定するために、新製品 100 本を検査したところ、平均寿命は 184 時間、標準偏差は 10 時間であった。危険率 5% と 1% の両方で検定せよ。