1 確率変数 X のとる値が $x_1, x_2, \ldots, x_n$ であり，値 x_k をとる確率が p_k であるとする．このとき，期待値 $E(X)$ は $E(X) = \sum_{k=1}^{n} x_k p_k$ で定義されるのであった．

a) a, b を定数とするとき，$aX + b$ は $ax_1 + b, ax_2 + b, \ldots, ax_k + b$ という値をとる確率変数である．$aX + b$ の期待値 $E(aX + b)$ を求めよ．

$$
\begin{aligned}
E(aX+b) &= \sum_{k=1}^{n} (ax_1+b)p_k \\
&= \sum_{k=1}^{n} ax_k p_k + \sum_{k=1}^{n} b p_k \\
&= a\sum_{k=1}^{n} x_k p_k + b\sum_{k=1}^{n} p_k \\
&= aE(X) + b\cdot 1 \\
&= aE(X) + b
\end{aligned}
$$

b) 確率変数 X の分散 $V(X)$ について $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$ が成り立つことと，a) の結果を用い，$V(aX + b)$ を求めよ．

$$
\begin{aligned}
V(ax+b) &= E((ax+b)^2) - E(ax+b)^2 \\
&= E(a^2X^2 + 2abX + b^2) - (aE(X)+b)^2 \\
&= a^2E(X^2) + 2abE(X) + b^2 \\
&\quad - (a^2E(X)^2 + 2abE(X) + b^2) \\
&= a^2E(X^2) - a^2E(X)^2 \\
&= a^2(E(X^2) - E(X)^2) \\
&= a^2V(X^2)
\end{aligned}
$$

2 1枚の硬貨を続けて5回投げるとき，表の出る回数を Y とする.

a) 確率変数 Y の確率分布を求めよ.

Y	0	1	2	3	4	5	計
P	$\frac{1}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{10}{32}$	$\frac{10}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{1}{32}$	1

b) 確率変数 Y の期待値と標準偏差を求めよ.

$$E(Y) = 0\times\frac{1}{32} + 1\times\frac{5}{32} + 2\times\frac{10}{32} + 3\times\frac{10}{32} + 4\times\frac{5}{32} + 5\times\frac{1}{32}$$

$$= \frac{1}{32}(5+20+30+20+5) = \frac{80}{32}$$

$$= \frac{5}{2} = 2.5$$

$$E(Y^2) = 0\times\frac{1}{32} + 1\times\frac{5}{32} + 4\times\frac{10}{32} + 9\times\frac{10}{32} + 16\times\frac{5}{32} + 25\times\frac{1}{32}$$

$$= \frac{1}{32}(5+40+90+80+25) = \frac{240}{32}$$

$$= \frac{15}{2}$$

$$V(Y) = E(Y^2) - E(Y)^2 = \frac{15}{2} - \left(\frac{5}{2}\right)^2$$

$$= \frac{5}{4} = 1.25$$

$$\sigma(Y) = \frac{\sqrt{5}}{2} \fallingdotseq 1.19$$