1 独立な確率変数 X と Y について，$E(XY) = E(X)E(Y)$ が成り立つ．この性質と，分散と期待値の関係式 $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$ を用い，独立な確率変数 X と Y について，$V(X+Y) = V(X) + V(Y)$ が成り立つことを証明せよ．

$$V(X+Y) = E((X+Y)^2) - E(X+Y)^2$$
$$= E(X^2 + 2XY + Y^2) - (E(X) + E(Y))^2$$
$$= E(X^2) + 2E(XY) + E(Y^2) - E(X)^2 - 2E(X)E(Y) - E(Y)^2$$
$$= (E(X^2) - E(X)^2) + (E(Y^2) - E(Y)^2)$$
$$+ 2(E(XY) - E(X)E(Y))$$

X, Y が独立ならば $E(XY) = E(X)E(Y)$ だから

$$V(X+Y) = (E(X^2) - E(X)^2) + (E(Y^2) - E(Y)^2)$$
$$= V(X) + V(Y)$$

2 確率変数 X の期待値が -3 で分散が 5，確率変数 Y の期待値が 2 で分散が 4 であり，X と Y が互いに独立であるとする．このとき，確率変数 $Z = X + Y$ の期待値，分散と標準偏差を求めよ．

$E(X) = -3$, $V(X) = 5$
$E(Y) = 2$, $V(Y) = 4$

$E(Z) = E(X+Y) = E(X) + E(Y) = -1$
$V(Z) = V(X+Y) = V(X) + V(Y) = 9$
$\sigma(Z) = \sqrt{V(Z)} = 3$

学籍番号：＿＿＿＿＿＿＿＿　氏名：＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

$\boxed{3}$ a) サイコロを 1 回投げるとき，1 の目が出ると $X = 1$，それ以外の目が出ると $X = 0$ とする．確率変数 X の期待値と分散を求めよ．

X	0	1	計
P	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

$$E(X) = 0 \times \frac{5}{6} + 1 \times \frac{1}{6} = \frac{1}{6}$$

$$E(X^2) = 0^2 \times \frac{5}{6} + 1^2 \times \frac{1}{6} = \frac{1}{6}$$

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{1}{6} - \left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{5}{36}$$

b) 1 個のサイコロを続けて 5 回投げるとき，1 の目の出る回数を Y とする．このとき，第 k 回目に 1 の目が出ると 1，それ以外の目が出ると 0 となる確率変数を X_k とすると，各 X_k は a) と同じ分布にしたがい，$X_1, \ldots, X_5$ は互いに独立であって，$Y = X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5$ と表せる．これを用いて，確率変数 Y の期待値，分散と標準偏差を求めよ．

$$E(Y) = E(X_1 + \cdots + X_5) = E(X_1) + \cdots + E(X_5)$$

$$= \underbrace{\frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{6}}_{5\text{回}} = \frac{5}{6}$$

$$V(Y) = V(X_1 + \cdots + X_5) = V(X_1) + \cdots + V(X_5)$$

$$= \underbrace{\frac{5}{36} + \cdots + \frac{5}{36}}_{5\text{回}} = \frac{25}{36}$$

$$\sigma(Y) = \sqrt{V(Y)} = \frac{5}{6}$$