1　2つの関数 $y = f(u)$ と $u = g(x)$ の合成関数 $y = f\bigl(g(x)\bigr)$ の導関数を求めたい．
$y = f\bigl(g(x)\bigr)$ の導関数 $\bigl(f\bigl(g(x)\bigr)\bigr)'$ は

$$\bigl(f\bigl(g(x)\bigr)\bigr)' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f\bigl(g(x+\Delta)\bigr) - f\bigl(g(x)\bigr)}{\Delta x}$$

で定義される．いま，x の増分 Δx に対し，u の増分 Δu は $\Delta u = g(x+\Delta x) - g(x)$ と表せるが，これより

$$g(x+\Delta x) = u + \Delta u$$

となる．これを用いて

$$\frac{f\bigl(g(x+\Delta)\bigr) - f\bigl(g(x)\bigr)}{\Delta x} = \frac{f(u+\Delta u) - f(u)}{\Delta x}$$

と書き直す．ここで，

$$\lim_{\Delta u\to 0}\frac{f(u+\Delta u) - f(u)}{\Delta u} = f'(u)$$

であることを考えて，少々無理やりに Δu を間に挟んで

$$\frac{f(u+\Delta u) - f(u)}{\Delta x} = \frac{f(u+\Delta u) - f(u)}{\boxed{}}\cdot\frac{\boxed{}}{\Delta x}$$

と書き直す．さらに，$\Delta u = g(x+\Delta x) - g(x)$ を用いて分子の Δu を書き直すことにより，

$$\frac{f\bigl(g(x+\Delta)\bigr) - f\bigl(g(x)\bigr)}{\Delta x} = \frac{f(u+\Delta u) - f(u)}{\Delta u}\cdot\frac{\boxed{}}{\Delta x}$$

を得る．いま，$\Delta x \to 0$ としたとき $\Delta u \to 0$ だから，

$$\begin{aligned}
\bigl(f\bigl(g(x)\bigr)\bigr)' &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f\bigl(g(x+\Delta x)\bigr) - f\bigl(g(x)\bigr)}{\Delta x}\\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{f(u+\Delta u) - f(u)}{\Delta u}\cdot\frac{\boxed{}}{\Delta x}\right)\\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(u+\Delta u) - f(u)}{\Delta u}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\boxed{}}{\Delta x}\\
&= \lim_{\Delta u\to 0}\frac{f(u+\Delta u) - f(u)}{\Delta u}\cdot\boxed{}\\
&= f'(u)\cdot\boxed{}
\end{aligned}$$

ここで，$u = g(x)$ だから，$f'(u) = \boxed{}$ と書き直せる．こうして，次の合成関数の微分公式が得られる．

$$\bigl(f\bigl(g(x)\bigr)\bigr)' = \boxed{}$$

学籍番号 : ____________________　氏名 : ________________________

$\boxed{2}$ $\left(f\left(g\left(h(x)\right)\right)\right)'$ を求めよ.

$\boxed{3}$ 関数 $f(x)$ とその逆関数 $f^{-1}(x)$ は $f\left(f^{-1}(x)\right)=x$ をみたす．この両辺を微分し，それを逆関数の導関数 $\left(f^{-1}(x)\right)'$ について解くことにより，$\left(f^{-1}(x)\right)'$ の微分公式を求めよ.

次の一連の問題の目的は，公式 $\left(x^a\right)'=ax^{a-1}$ が，任意の有理数 a について成り立つことを証明することである.

$\boxed{4}$ 【a が自然数の場合】二項定理により $(x+h)^n = x^n + {}_nC_1 x^{n-1}h + {}_nC_2 x^{n-2}h^2 + \cdots + {}_nC_{n-1} x h^{n-1} + h^n$ が成り立つ．これを用い，関数 $f(x)=x^n$ の導関数を定義にしたがって求めよ.

【裏に続く】

$\boxed{5}$ 【a が負の整数の場合】商の微分公式を用いて $\left(\dfrac{1}{x^n}\right)'$ を求めよ．それより $(x^{-n})'$ の微分公式を導け.

$\boxed{6}$ 【$a = 1/n$ の場合】$f(x) = x^n$ とすると，関数 $\sqrt[n]{x}$ は，関数 $f(x)$ の逆関数である．すなわち $f^{-1}(x) = \sqrt[n]{x}$ である．問題 3 で得られた逆関数の微分公式を用いて $\left(\sqrt[n]{x}\right)' = \dfrac{1}{n\left(\sqrt[n]{x}\right)^{n-1}}$ であることを示せ．さらに，その結果を分数指数を用いて表すことにより $\left(x^{\frac{1}{n}}\right)'$ の微分公式を導け.

$\boxed{7}$ 【a が有理数の場合】$x^{\frac{m}{n}} = (x^m)^{\frac{1}{n}}$ であることを用い，合成関数の微分公式を用いて $\left(x^{\frac{m}{n}}\right)'$ の微分公式を導け.

$\boxed{8}$ 次の関数を変数 x で微分せよ.

a) $f(x) = (x^2 - x + 1)^5$

$f'(x) =$

b) $f(x) = \dfrac{1}{x\sqrt{x}}$

$f'(x) =$

c) $f(x) = \left(x^2 - \dfrac{1}{x}\right)^3$

$f'(x) =$

d) $f(x) = \sqrt{16 - x^2}$

$f'(x) =$

e) $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - x + 1}$

$f'(x) =$

f) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$

$f'(x) =$