復習問題の略解

1　a) $3x^2+10x+8=(3x+4)(x+2)$

b) $6a^2+11ab-2b^2=(a+2b)(6a-b)$

c) $x^4y-xy^4=xy(x^3-y^3)=xy(x-y)(x^2+xy+y^2)$

d) $81a^3+3=3\big((3a)^3+1^3\big)=3(3a+1)(9a^2-3a+1)$

2　筆算による割り算を実行すると，商は $3x+2$，余りは $x+6$ となる．
（これより，$3x^3-4x^2+12x+16=(x^2-2x+5)(3x+2)+(x+6)$ と表せる．）

3　a) $P(2)=2^3+5\cdot 2^2-2\cdot 2-24=0$．これより，$P(x)$ を $x-2$ で割ったときの余りは 0 であること，すなわち $P(x)$ は $x-2$ で割り切れることがわかる．

b) $P(x)$ を $x-2$ で割ると，$P(x)=(x-2)(x^2+7x+12)$．さらに因数分解して $P(x)=(x-2)(x+3)(x+4)$．

c) $x^3+x^2-6x=x(x-2)(x+3)$ と因数分解されるので, 最大公約数は $(x-2)(x+3)$, 最小公倍数は $x(x-2)(x+3)(x+4)$.

4　a) $\dfrac{b}{a^3}$　b) $3x^{-2}$　c) 2　d) $9x^2y^3$

5　a) $\dfrac{1}{abc}$　b) $\dfrac{8ab-6a+5b}{15ab}$　c) $\dfrac{-x(2x-13)}{(2x-1)(2x+5)}$　d) $-\dfrac{x-3}{(x-1)(x-2)}$

e) $-\dfrac{x+27}{(x-3)^2(x+3)}$　f) $\dfrac{x+14}{(x+2)^2(x-2)}$　g) 0　h) $\dfrac{y-x}{xy-1}$　i) $\dfrac{1}{x}$

6　もとの立方体の 1 辺の長さを x とする．縦横を変えて作った立方体の体積は $(x-2)(x+5)x$．これがもとの立方体の体積 x^3 より 48cm^3 増加したのだから，$(x-2)(x+5)x=x^3+48$．これを整理し，因数分解すると $(3x+8)(x-6)=0$．ここで，$x>0$ だから，$x=6$ が唯一の解となる．

7　a) $x\leqq -3$，$x\geqq 1$，　b) $3-\sqrt{2}<x<3+\sqrt{2}$　c) $x<-1-\sqrt{2}$，$x>-1+\sqrt{2}$

8　$y=x^2-2x-2=(x-1)^2-3$ とし，$-1\leqq x\leqq 5$ においてグラフまたは増減表をかく．$x=5$ のとき最大で，最大値 13．$x=1$ のとき最小で，最小値 -3．

9　a) 1 円値上げすると $\frac{1}{2}$ 個売り上げが減るということだから, x 円値上げすると $\frac{x}{2}$ 個売り上げが減る．したがって, 売価が $(80+x)$ 円のとき何個の売り上げは $\big(100-\frac{x}{2}\big)$ となり, 売上金額は（売価）×（売り上げ個数）$=(80+x)\big(100-\frac{x}{2}\big)=-\frac{1}{2}(x-60)^2+9800$．これより，最の売り上げ金額を得るための売価は $80+60=140$ 円．

b) a) より，最の売り上げ金額を得るの $x=60$ のとき．このとき，売価は $80+60=140$ 円．

10　短い辺の長さを x とすると，長い辺の長さは $10-x$ となる．「短い辺」が「長い辺」より本当に短いための条件は $x<10-x$．すなわち $x<5$ である．一方，長方形の面積は $x(10-x)$ なので，

$$x(10-x)\geqq 21 \iff -x^2+10x-21\geqq 0 \iff (x-3)(x-7)\leqq 0 \iff 3\leqq x\leqq 7$$

これと先ほどの条件を合わせて $3\leqq x<5$．

11　a) 5　b) 1　c) $\dfrac{10}{3}$　d) 5

12　1 回濾過するたびに有害物質の量は $\dfrac{2}{10}$ になので，濾過を n 回繰り返すとき，有害物質の量はもとの $\left(\dfrac{2}{10}\right)^n$ になる．これが $\dfrac{1}{10000}$ 以下になるようにしたい．すなわち，$\left(\dfrac{2}{10}\right)^n<\dfrac{1}{10^4}$ となる n を求めればよい．両辺の $\log_{10}$ をとり，対数の基本性質を用いて変形すると，$n(\log_{10}2s-\log_{10}10)<\log_{10}1-\log_{10}10^4$．さらに変形して $n(\log_{10}2-1)<-4$．ここで，$\log_{10}2=0.3010$ を用いて数値計算すると（n の係数が負なので不等号の向きが変わることに注意して），$n>5.7227\ldots$．すなわち，6 回濾過すればよいことがわかる．

13　a) $\dfrac{3}{2}$　b) $\sqrt{2}\cos\left(-\dfrac{5}{4}\pi\right)+3\sin\dfrac{3}{2}\pi-\sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)=-\dfrac{7}{2}$

【裏につづく】

14 a) $\theta = \frac{4}{3}\pi,\ \frac{5}{3}\pi$　　b) $\theta = \frac{1}{3}\pi,\ \frac{2}{3}\pi,\ \frac{4}{3}\pi,\ \frac{5}{3}\pi$

15 a) 3　　b) -2　　c) a

16 a) $f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{(2h-1)^2-(-1)^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{4h^2-4h}{h} = \lim_{h\to 0}(4h-4) = -4$

b) $f'(1) = \lim_{h\to 0} \frac{\left(2(1+h)-1\right)^2-1^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{4h^2+4h}{h} = \lim_{h\to 0}(4h+4) = 4$

c) $f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{\left(2(a+h)-1\right)^2-(2a-1)^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{4h^2+8ah-4h}{h} = \lim_{h\to 0}(4h+8a-4) = 4(2a-1)$

17 a) $f'(x) = 2(x+3x^2) + 2x(1+6x) = 2x(2+9x)$

b) $f'(x) = 2(3x-5) + (2x+3)\cdot 3 = 12x-1$

c) $f'(x) = (x^2+x+1) + (x-1)(2x+1) = 3x^2$　（$f(x) = x^3-1$ に気が付けばすぐに求まる.）

18 a) 16　　b) 8

c) $f'(2) = \lim_{h\to 0} \frac{(2+h)^3-(2+h)^2-(2+h)+1-3}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^3+5h^2+7h}{h} = \lim_{h\to 0}(h^2+5h+7) = 7$

d) $y = 7x-11$

e) $f'(x) = 3x^2-2x-1$　　f) $x = 1,\ -\frac{1}{3}$

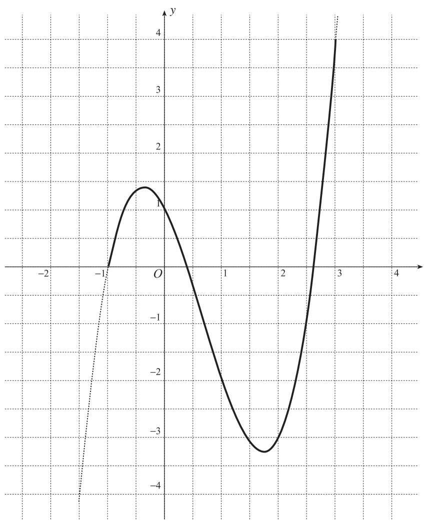
g) $f'(x) = -1$ となる x は 0 と $\frac{2}{3}$. $x=0$ での接線 $y = -x+1$, $x = \frac{2}{3}$ での接線 $y = -x+\frac{23}{27}$

h) 増減表を書くと $x = -\frac{1}{3}$ で極大値 $\frac{32}{27}$, $x = 1$ で極小値 0.

19 $f'(x) = 3x^2-4x-2$ で, $f'(x) = 0$ となるのは $x = \frac{2\pm\sqrt{10}}{3}$ のとき.
$-1 < \frac{2-\sqrt{10}}{3} < \frac{2+\sqrt{10}}{3} < 3$ となるので, この範囲で増減表を書くと

x	-1		$\frac{2-\sqrt{10}}{3}$		$\frac{2+\sqrt{10}}{3}$		3
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	↗	極大	↘	極小	↗	4

したがって, $f(x)$ は $x = \frac{2+\sqrt{10}}{3}$ のとき最小で, 最小値 $-\frac{25-20\sqrt{10}}{27} \fallingdotseq -3.27$, $x=3$ のとき最大で, 最大値 4 となる. グラフは右の図のようになる.



20 a) 各辺が正でなければいけないので $x > 0$ かつ $10-2x > 0$ かつ $16-2x > 0$.
ゆえに $0 < x < 5$.

b) 体積 $V = x(10-2x)(16-2x) = 4x(5-x)(8-x)$.

c) $V' = \left(4(x^3-13x^2+40x)\right)' = 4(3x^2-26x+40) = 4(x-2)(3x-20)$.
$0 < x < 5$ の範囲で $V' = 0$ となるのは $x = 2$ のみ. $0 < x < 5$ の範囲で増減表を書くと下のようになる,

x	0		2		5
V'		$+$	0	$-$	
V	0	↗	144	↘	0

したがって, $x = 2$ のとき, 体積 V は最大となる.

2015 年 7 月 15 日