

1 次のそれぞれの式を簡単にせよ。ただし、文字はすべて正とする。

$$a) 4^{\frac{2}{3}} \times 8^{-\frac{1}{2}} \div 16^{-\frac{1}{6}} = (2^2)^{\frac{2}{3}} \times (2^3)^{-\frac{1}{2}} \times (2^4)^{\frac{1}{6}} = 2^{\frac{4}{3} - \frac{3}{2} + \frac{2}{3}} = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$$

$$b) (a^{\frac{1}{3}} - 1)(a^{\frac{2}{3}} + a^{\frac{1}{3}} + 1) = (a^{\frac{1}{3}})^3 - 1 = a - 1$$

$$c) (a^x + a^{-x})^2 - (a^x - a^{-x})^2 = a^{2x} + 2 + a^{-2x} - (a^{2x} - 2 + a^{-2x}) = 4$$

$$d) \frac{\sqrt[4]{a^3} \sqrt[3]{a^2}}{\sqrt[12]{a^{11}}} = a^{\frac{3}{4}} \times a^{\frac{2}{3}} \times a^{-\frac{11}{12}} = a^{\frac{9+8-11}{12}} = a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$$

$$e) \frac{(ab^{-\frac{5}{2}}) \div (a^{\frac{1}{4}} b^{-\frac{3}{4}})}{(a^{-\frac{3}{2}} b^{\frac{3}{4}}) \div (a^{\frac{9}{4}} b^{-\frac{1}{2}})} = a^{1 - \frac{1}{4} + \frac{3}{2} + \frac{9}{4}} \cdot b^{-\frac{5}{2} + \frac{5}{4} - \frac{3}{4} - \frac{1}{2}} = a^{\frac{9}{2}} b^{-\frac{5}{2}}$$

2 次の数の大小をくらべよ。  $0.5^4$ ,  $0.5^{-3}$ ,  $2^{-2}$ 。

$$0.5^4 = \left(\frac{1}{2}\right)^4 = 2^{-4}, \quad 0.5^{-3} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = 2^3$$

$$2^{-4} < 2^{-2} < 2^3 \text{ より}$$

$$0.5^4 < 2^{-2} < 0.5^{-3}$$

3 次の不等式をみたす  $x$  の範囲を求めよ。

$$a) 2^x > 9$$

両辺の  $\log_2$  をとり

$$\log_2 2^x > \log_2 9$$

$$x > \log_2 3^2$$

$$x > 2 \log_2 3$$

$$b) 0.3^x > 0.09$$

$$\left(\frac{3}{10}\right)^x > \left(\frac{3}{10}\right)^2$$

$$\frac{3}{10} < 1 \text{ だから } \left(\frac{3}{10}\right)^a < \left(\frac{3}{10}\right)^b \Leftrightarrow a > b$$

$$\therefore x < 2$$

4  $\log_2 3 = a$  とするとき、 $\log_4 9$ ,  $\log_3 4$ ,  $\log_9 2$  を  $a$  を用いて表せ。

$$\log_4 9 = \frac{\log_2 9}{\log_2 4} = \frac{2 \log_2 3}{2} = \log_2 3 = a.$$

$$\log_3 4 = \frac{\log_2 4}{\log_2 3} = \frac{2}{a}, \quad \log_9 2 = \frac{\log_2 2}{\log_2 9} = \frac{1}{2 \log_2 3} = \frac{1}{2a}$$

5 次のそれぞれの式を簡単にせよ。

$$a) 2^{\log_2 3} = 3 \quad (\text{これは } \log_2 \text{ の定義による})$$

$$b) (\log_2 3 + \log_4 9)(\log_3 4 + \log_9 2) = \left(\log_2 3 + \frac{\log_2 9}{\log_2 4}\right) \left(\frac{\log_2 4}{\log_2 3} + \frac{\log_2 2}{\log_2 9}\right) \\ = (\log_2 3 + \log_2 3) \left(\frac{2}{\log_2 3} + \frac{1}{2 \log_2 3}\right) = 2 \log_2 3 \times \left(2 + \frac{1}{2}\right) \times \frac{1}{\log_2 3} = 5$$

$$c) \log_2 8 \cdot \log_{27} 5 \cdot \log_5 3 = \log_2 2^3 \times \frac{\log_2 5}{\log_2 27} \times \frac{\log_2 3}{\log_2 5} = 3 \times \frac{1}{3 \log_2 3} \times \frac{\log_2 3}{1} = 1$$

6  $\log_2(x-1) = 3$  をみたす  $x$  の値を求めよ。

$$x-1 = 2^3$$

$$x = 2^3 + 1 = 9$$

7 「過疎現象で、村の人口が毎年1割ずつ減っていくので、このままでは10年経つと村は空っぽになる…」これは正しいか。

10年後に村の人口はもとの  $\left(\frac{9}{10}\right)^{10}$  になるか。これは正の値をとり0ではない!

(もう少し正確にいうと、10年後の人口は  $\left(\frac{9}{10}\right)^{10} \approx 0.35$  だから、村の人口は10年後にもとの人口の  $\frac{1}{3}$  程度になるに過ぎない)

以下の問題では  $\log_{10} 2 = 0.3010$  とする。

8  $(\frac{1}{2})^{30}$  は小数第何位にはじめて 0 でない数字が現れるか。

$10^{-n} \leq X < 10^{-n+1}$  とするとき、 $X$  を小数で表すと小数  $n$  位にはじめて 0 でない数字が現れる。

$$\log_{10} (\frac{1}{2})^{30} = -30 \times 0.3010 = -0.9030$$

$$\therefore 10^{-10} \leq (\frac{1}{2})^{30} < 10^{-9}$$

よって  $(\frac{1}{2})^{30}$  は小数第 10 位にはじめて 0 でない数字が現れる

9 体内に入った水銀が体外に排出されて、もとの量の  $\frac{1}{2}$  になるには 125 日かかるといわれている。もとの量の  $\frac{1}{10}$  以下になるには何日かかるか。

$x$  日後に体内に残る水銀量は  $(\frac{1}{2})^{\frac{x}{125}}$  と表せる。

$$(\frac{1}{2})^{\frac{x}{125}} \leq \frac{1}{10}$$

$$\log_{10} (\frac{1}{2})^{\frac{x}{125}} \leq \log_{10} (\frac{1}{10})$$

$$-\frac{x}{125} \log_{10} 2 \leq -1$$

$$x \geq \frac{125}{\log_{10} 2} = 415.24 \dots \quad \underline{416 \text{ 日後 } 1 = \frac{1}{10} \text{ 以下になる}}$$

10 30 分ごとに分裂して、個数が 2 倍に増えるバクテリアがある。このバクテリア 10 個が、1 億個以上に増えるのは何時間後か。

バクテリアは 1 時間後に 4 倍に増える。

$x$  時間後には 10 個のバクテリアは  $10 \times 4^x$  になる。

$$10 \times 4^x \geq 10^8$$

$$2^{2x} \geq 10^7$$

$$2x \log_{10} 2 \geq 7$$

$$x \geq \frac{7}{2 \log_{10} 2} = 11.62 \dots$$

11.62 時間後

(11 時間 38 分後)

11 座標軸の 1 目盛りを 1cm として関数  $y = 2^x$  のグラフをかくとき、 $x$  の変域をたとえば  $0 \leq x \leq 10$  とすると  $y$  の変域は  $1 \leq y \leq 2^{10}$  となり、グラフ用紙は  $y$  軸方向について 1024cm の長さが必要と考えられる。 $x$  の変域を  $0 \leq x \leq 60$  としたとき、グラフ用紙は理論的にはおよそどのくらいの長さがよいか。次のうちから最もふさわしいものを選べ。

a) 1km

b) 100km

c) 地球から月までの距離 (約 38 万 km)

d) 地球から太陽までの距離 (約  $1.5 \times 10^{11}$  m)

e) 1 光年 (約  $9.5 \times 10^{15}$  m)

$2^{60}$  cm がどれくらいの長さか、概算する。

$$2^{10} = 1024 \div 10^3 \text{ から } 2^{60} = (2^{10})^6 \div (10^3)^6 = 10^{18}$$

$$100 \text{ cm} = 1 \text{ m} \text{ から } 2^{60} \text{ cm} = 10^{18} \text{ cm} = 10^{16} \text{ m}$$

$$\text{一方, } 1 \text{ 光年} \text{ は } 9.5 \times 10^{15} \text{ m} = 10^{16} \text{ m} \text{ から}$$

e) の 1 光年が  $2^{60}$  cm に一番近い