学籍番号：＿＿＿＿＿＿＿＿　氏名：＿＿＿＿＿＿＿＿

1 次のそれぞれの値を求めよ.

a) $\log_2 32 =$ 5

b) $\log_{25} 5 =$ $\frac{1}{2}$

c) $\log_2 \frac{1}{4} =$ -2

d) $\log_4 16 =$ 2

e) $\log_5 5 =$ 1

f) $\log_4 2 =$ $\frac{1}{2}$

g) $\log_3 \frac{1}{3} =$ -1

h) $\log_8 \sqrt{2} =$ $\frac{1}{6}$

2 次の式の x を求めよ.

a) $\log_2 x = 3$　　$x = 2^3 = 8$

b) $\log_4 x = -\frac{1}{2}$　　$x = 4^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$

c) $\log_3 x = 2$　　$x = 3^2 = 9$

d) $\log_{27} x = 3$　　$x = 27^3 = 3^9$
$= 19683$

3 $\log_a M = r$，$\log_a N = s$ とおくと $M = a^r$，$N = a^s$ と表せる。このことと指数法則を利用して次のおのおのの対数の性質を証明せよ.

a) $\log_a(M \times N) = \log_a M + \log_a N$

$$\log_a(M \times N) = \log_a(a^r \times a^s)$$
$$= \log_a a^{r+s}$$
$$= r+s$$
$$= \log_a M + \log_a N$$

b) $\log_a\left(\frac{M}{N}\right) = \log_a M - \log_a N$

$$\log_a\left(\frac{M}{N}\right) = \log_a\left(\frac{a^r}{a^s}\right)$$
$$= \log_a a^{r-s}$$
$$= r-s$$
$$= \log_a M - \log_a N$$

c) $\log_a M^n = n \log_a M$

$$\log_a M^n = \log_a (a^r)^n$$
$$= \log_a a^{nr}$$
$$= nr$$
$$= n \log_a M$$

4 $p = \log_a 2$，$q = \log_a 3$ とするとき，次の値を p，q で表せ.

a) $\log_a 8 =$ $3p$

b) $\log_a 18 =$ $p + 2q$

c) $\log_a 12 =$ $2p + q$

d) $\log_a 1.5 =$ $\log_a \frac{3}{2} = q - p$

5 次の各々の式を計算せよ.

a) $\log_2 \frac{3}{4} - \log_2 \frac{3}{2} =$ $\log_2 3 - \log_2 4 - (\log_2 3 - \log_2 2) = -2 + 1 = -1$

b) $\frac{1}{2}\log_3 5 - \log_3 \frac{\sqrt{5}}{3} =$ $\frac{1}{2}\log_3 5 - (\frac{1}{2}\log_3 5 - \log_3 3) = 1$

c) $\log_2(3+\sqrt{5}) + \log_2(3-\sqrt{5}) =$ $\log_2((3+\sqrt{5})(3-\sqrt{5})) = \log_2(9-5) = \log_2 4 = 2$

d) $3\log_5 15 - \log_5 135 =$ $3(\log_5 3 + \log_5 5) - (\log_5 27 + \log_5 5) = 2$

6 次の各々の式を簡単にせよ.

a) $\frac{1}{3}\log_{10} 125 + \log_{10} \frac{3}{5} - \log_{10} 0.3 =$ $\frac{1}{3}\log_{10} 5^3 + \log_{10} 3 - \log_{10} 5 - \log_{10} \frac{3}{10}$
$= \log_{10} 5 + \log_{10} 3 - \log_{10} 5 - \log_{10} 3 + \log_{10} 10 = 1$

b) $\log_a \frac{A}{B} + \log_a \frac{B}{C} + \log_a \frac{C}{A} =$ $\log_a\left(\frac{A}{B} \times \frac{B}{C} \times \frac{C}{A}\right) = \log_a 1 = 0$

7 対数の定義により，$a^{\log_a b} = b$ が成り立つ．この式の両辺の c を底とする対数を取ることにより，$\log_a b$ を $\log_c a$ と $\log_c b$ で表せ.

$a^{\log_a b} = b$ より $\log_c a^{\log_a b} = \log_c b \Rightarrow (\log_a b)\log_c a = \log_c b$

$$\therefore \log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

8 $\log_2 3 = m$ のとき，$\log_4 6$，$\log_3 2$ を m で表せ.

a) $\log_4 6 =$ $\frac{\log_2 6}{\log_2 4} = \frac{\log_2 2 + \log_2 3}{2}$
$= \frac{1+m}{2}$

b) $\log_3 2 =$ $\frac{\log_2 2}{\log_2 3} = \frac{1}{m}$

9 底の変換公式を用いて次の式を簡単にせよ.

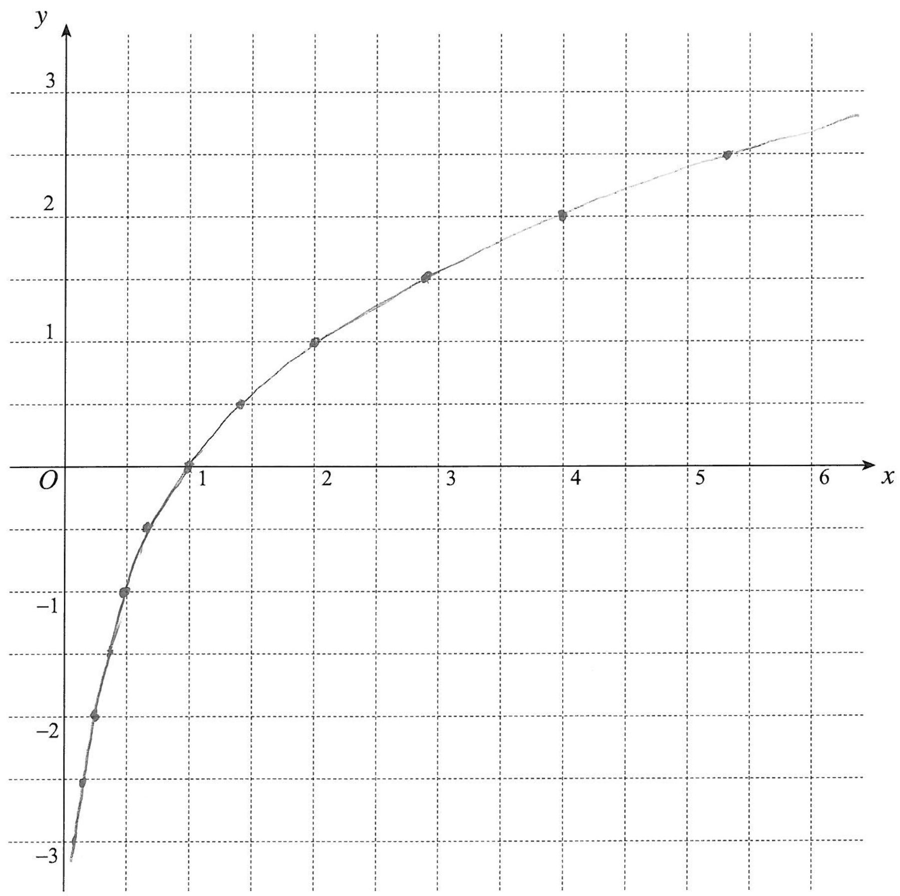
a) $\log_a b \cdot \log_b a =$ $\log_a b \times \dfrac{\log_a a}{\log_a b} = 1$

b) $\log_a b \cdot \log_b c \cdot \log_c a =$ $\log_a b \times \dfrac{\log_a c}{\log_a b} \times \dfrac{\log_a a}{\log_a c} = 1$

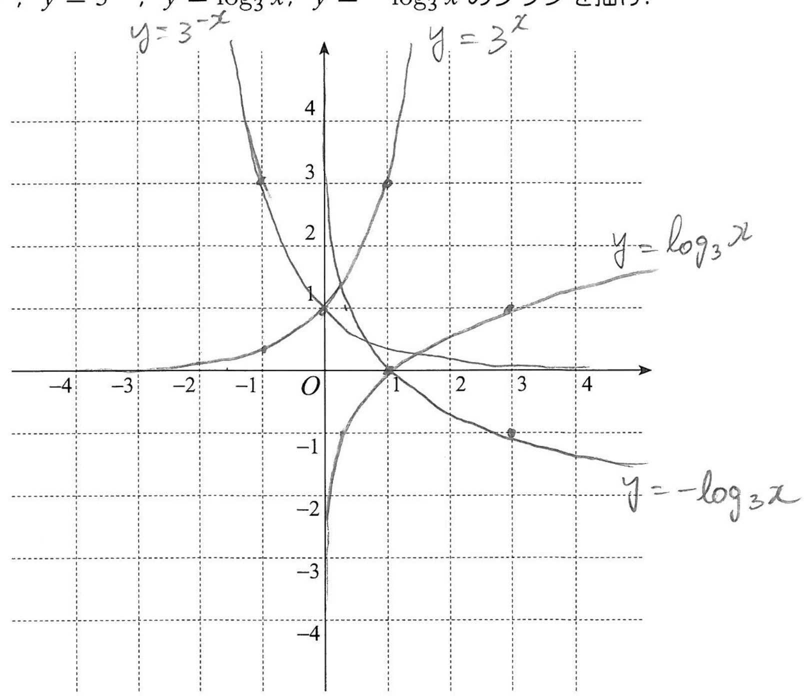
10 関数 $y = \log_2 x$ について次の表にあてはまる x の値を 小数 で表せ. ただし, $2^{0.5} = 1.414$ とする.

x	0.125	0.178	0.25	0.356	0.5	0.707	1.0	1.414	2.0	2.828	4.0	5.656	8.0
y	−3	−2.5	−2	−1.5	−1	−0.5	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3

11 前問を利用して, 指数関数 $y = \log_2 x$ のグラフを描け.



12 4つの関数 $y = 3^x$, $y = 3^{-x}$, $y = \log_3 x$, $y = -\log_3 x$ のグラフを描け.



13 2^{32} は何桁の整数か. ただし, $\log_{10} 2 = 0.3010$ とする.

$\log_{10} 2^{32} = 32 \log_{10} 2 = 9.632\cdots$

$\therefore 10^9 < 2^{32} \fallingdotseq 10^{9.632} < 10^{10}$

したがって 2^{32} は 10 桁の数

14 光線が, ある種のガラスを1枚透過するごとに, その光度の $\dfrac{1}{10}$ を失うという. このガラスを何枚以上重ねたものを透過すると, 光度がもとの $\dfrac{1}{3}$ 以下に弱められるか. ただし $\log_{10} 3 = 0.4771$ とする.

1枚透過するごとに光度は $\left(\frac{9}{10}\right)$ になるから, n 枚透過すると光度はもとの $\left(\frac{9}{10}\right)^n$

これが $\frac{1}{3}$ 以下になればよい.

$\left(\frac{9}{10}\right)^n \leqq \frac{1}{3} \Rightarrow \log_{10}\left(\frac{9}{10}\right)^n \leqq \log_{10}\left(\frac{1}{3}\right)$

$\Rightarrow n\,(\log_{10} 9 - \log_{10} 10) \leqq -\log_{10} 3$

$n\,(2 \times \log_{10} 3 - 1) \leqq -\log_{10} 3$

$n \geqq \dfrac{-0.4771}{-0.0458} = 10.42..$

よって 11 枚以上 透過すると 光度が 1/3 以下になる

2014年6月5日