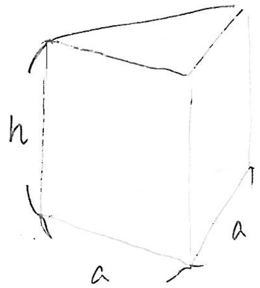
学籍番号：＿＿＿＿＿＿＿＿　氏名：＿＿＿＿＿＿＿＿

1 底面が正三角形である三角柱がある．底面の一辺と高さの和が 15 cm であるとき，三角柱の体積を最大にするには底面の一辺を何 cm にすればよいか．



$a+h=15\,(\mathrm{cm}) \Rightarrow 0<a<15$

底面積 $=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$

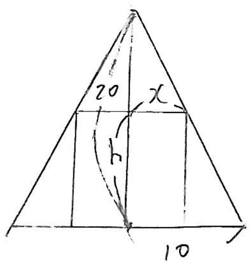
体積 $V=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2h=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2(15-a)$

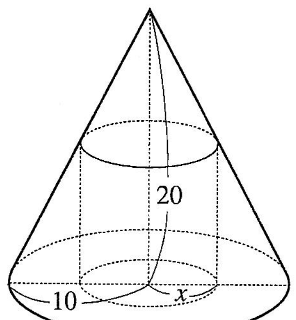
$\frac{dV}{da}=\frac{\sqrt{3}}{4}(30a-3a^2)=\frac{3\sqrt{3}}{4}a(10-a)$

a	0		10		15
$\frac{dV}{da}$		+	0	−	
V	0	↗	最大	↘	0

$a=10\,(\mathrm{cm})$ のとき体積 V が最大になる

2 右図のように，円錐に内接する円柱がある．円錐の底面の半径が 10cm，高さが 20cm で，円柱の底面の半径が $x$cm のとき，この円柱の体積を表す式を作れ．また，円柱の体積が最大になるのは，どのような場合か．





三角形の相似により

$10:x=20:(20-h)$

$20x=10(20-h)$

$h=20-2x$

円柱の体積 $V=\pi x^2(20-2x)=2\pi x^2(10-x)$

$\frac{dV}{dx}=2\pi(20x-3x^2)$

$=2\pi x(20-3x)$

$0<x<10$ より

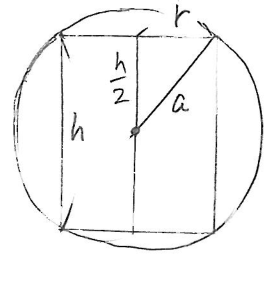
x	0		$\frac{20}{3}$		10
$\frac{dV}{dx}$		+	0	−	
V	0	↗		↘	0

底面の半径 x が $\frac{20}{3}$ (cm) のとき体積 V が最大

このとき $h=20-\frac{40}{3}=\frac{20}{3}$

すなわち円柱の底面の半径と高さが等しいとき体積最大

3 半径が a（一定）の球がある．この球に内接する直円柱のうちで，体積が最大なものの底面の半径と高さとの比を求めよ．



円柱の高さを h，半径を r とすると

$r^2+\left(\frac{h}{2}\right)^2=a^2 \Rightarrow r^2=a^2-\frac{h^2}{4}$

体積 $V=\pi r^2h=\pi\left(a^2-\frac{h^2}{4}\right)h$

$\frac{dV}{dh}=\pi\left(a^2-\frac{3}{4}h^2\right)$

$0<h<2a$

h	0		$\frac{2\sqrt{3}}{3}a$		$2a$
$\frac{dV}{dh}$		+	0	−	
V		↗		↘	

$h=\frac{2\sqrt{3}}{3}a$ のとき体積最大

このとき $r^2=a^2-\frac{1}{4}\cdot\frac{4}{3}a^2=\frac{2}{3}a^2$ より $r=\frac{\sqrt{6}}{3}a$

半径：高さ $=r:h=1:\sqrt{2}$

4 $x \geqq 1$ のとき，不等式 $2x^3+27 \geqq 9x^2$ が成り立つことを証明せよ．

$f(x)=2x^3+27-9x^2$ とおく

$f'(x)=6x^2-18x=6x(x-3)$

x	1		3	
$f'(x)$		−	0	+
$f(x)$		↘	0	↗

$f(x)$ は区間 $x \geqq 1$ では $x=3$ において最小値 0 をとる．

すなわち $x \geqq 1$ において $f(x) \geqq 0$ が成り立つ．

5 ある工場の生産関数は $Q(L) = 12L^2 - \frac{1}{20}L^3$ で与えられる．ただし，L は労働者の人数を表し，$0 \leqq L \leqq 200$ である．

a) 生産量 $Q(L)$ を最大にするような L を L^* とする．L^* を求めよ．

$$Q'(L) = 24L - \frac{3}{20}L^2 = L\left(24 - \frac{3}{20}L\right)$$

右の増減表より，$L=160$ のとき $Q(L)$ 最大

$\therefore L^* = 160$

L	0		160		200
$Q'(L)$		$+$	0	$-$	
$Q(L)$		↗		↘	

b) 労働者一人当たりの生産量 $\frac{Q(L)}{L}$ を最大にするような L を L^{**} とする．L^{**} を求めよ．

$$\left(\frac{Q(L)}{L}\right)' = \frac{Q'(L)L - Q(L)}{L^2} = \frac{L^2\left(24 - \frac{3}{20}L\right) - L^2\left(12 - \frac{1}{20}L\right)}{L}$$

$$= L\left(12 - \frac{1}{10}L\right)$$

L	0		120		200
$(Q/L)'$		$+$	0	$-$	
Q/L		↗		↘	

右の増減表より $L = 120$ のとき $\frac{Q(L)}{L}$ が最大となる．

$\therefore L^{**} = 120$

c) $Q'(L^{**}) = Q(L^{**})/L^{**}$ であることを示せ．

$$Q'(L^{**}) = 120\left(24 - \frac{3}{20} \times 120\right) = 720$$

$$Q(L^{**})/L^{**} = \frac{120^2\left(12 - \frac{1}{20}120\right)}{120} = 720$$

$$\therefore Q'(L^{**}) = Q(L^{**})/L^{**}$$

6 $f(x) = x^4 + 2x^3 - 1$ とする．

a) x が -1 から 1 まで変化するときの $f(x)$ の平均変化率を求めよ．

$$\frac{f(1) - f(-1)}{1 - (-1)} = \frac{2 - (-2)}{1 - (-1)} = \frac{4}{2} = 2$$

b) $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を求めよ．

$$f'(x) = 4x^3 + 6x^2 = 2x^2(2x+3)$$

c) $y = f(x)$ のグラフの $(-1, -2)$ における接線の方程式を求めよ．

$f'(-1) = 2$

$y - (-2) = 2(x - (-1))$

$y = 2x$ //

d) $f'(x) = 0$ となる x を求めよ．

$$f'(x) = 0 \iff 2x^2(2x+3) = 0$$

$$\iff x = 0,\ -\frac{3}{2}$$

e) $f(x)$ の増減表を書き，$f(x)$ が極大・極小となる x の値を求めよ．

x		$-\frac{3}{2}$		0	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
$f(x)$	↘	$-\frac{43}{16}$	↗	-1	↗
		極小			

$f(x)$ は $x = -\frac{3}{2}$ で極小となる。極大となる x はない。

f) $y = f(x)$ のグラフと，$(-1, -2)$ における接線を描け．