学籍番号：＿＿＿＿＿＿＿＿　氏名：＿＿＿＿＿＿＿＿

1 次の関数 $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を求め，$f'(x) > 0$ となる x の範囲を求めよ．さらにそれをもとに増減表を書け．

a) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3$

$f'(x) = 3x^2 - 6x$
$= 3x(x-2)$

$f'(x) > 0$
$\Leftrightarrow 3x(x-2) > 0$
$x < 0,\ x > 2$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	3	↘	−1	↗

b) $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 5$

$f'(x) = 3x^2 + 6x - 9$
$= 3(x-1)(x+3)$

$f'(x) > 0$
$\Leftrightarrow x < -3,\ x > 1$

x	$\cdots$	−3	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	32	↘	0	↗

2 関数 $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$ の導関数 $f'(x)$ を求め，$f'(x) > 0$ となる x の範囲を求めよ．さらにそれをもとに増減表を書き，$-2 \leqq x \leqq 3$ における最大値と最小値を求めよ．また，それらを与える x の値を求めよ．

$f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$

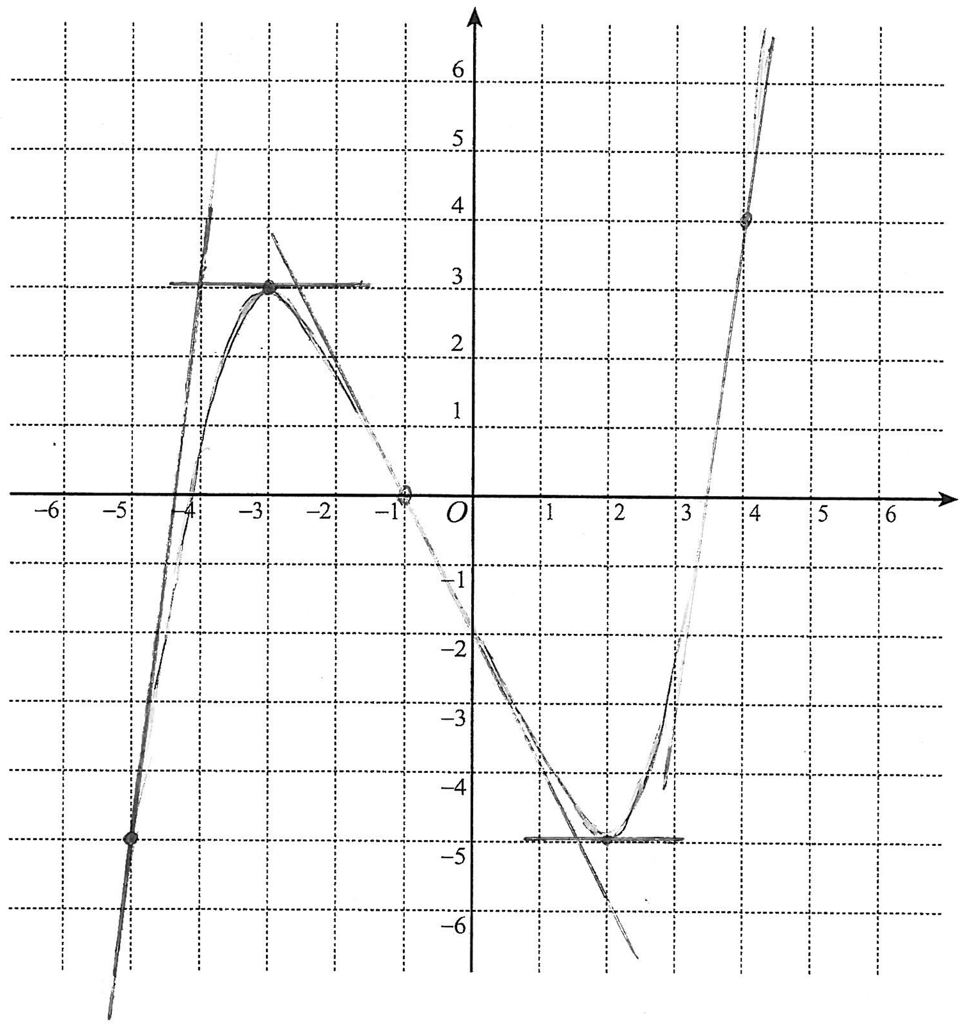
$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x < 0,\ x > 2$

右の増減表より
$x = 0, 3$ のとき最大で
最大値 4
$x = -2$ のとき最小で
最小値 −16

x	−2	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$	3
$f'(x)$	+	+	0	−	0	+	+
$f(x)$	−16	↗	4	↘	0	↗	4

3 関数 $f(x)$ とその導関数 $f'(x)$ について，わかっていることが下の表にまとめてある．（注：この関数 $f(x)$ は 3 次関数ではない．）このとき，$y = f(x)$ のグラフを可能な限りなるべく忠実に描け．［まず，$x = -5, -3, -1, 2, 4$ における接線を描くことから始めるとよい．］

x		−5		−3		−1		2		4	
$f'(x)$	+	8	+	0	−	−2	−	0	+	7	+
$f(x)$		−5		3		0		−5		4	

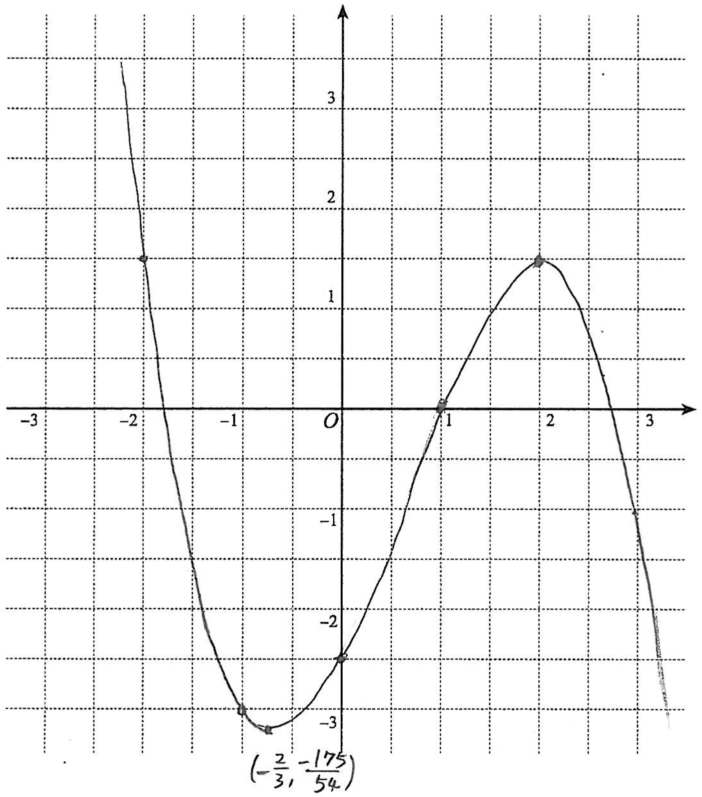


4 次の関数 $f(x)$ の増減表を書き，グラフを描け．

a) $f(x) = -\frac{1}{2}x^3 + x^2 + 2x - \frac{5}{2}$

$$f'(x) = -\frac{3}{2}x^2 + 2x + 2$$
$$= -\frac{1}{2}(3x^2 - 4x - 4)$$
$$= -\frac{1}{2}(3x+2)(x-2)$$

x		$-\frac{2}{3}$		2	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	$-\frac{175}{54}$	↗	$\frac{3}{2}$	↘

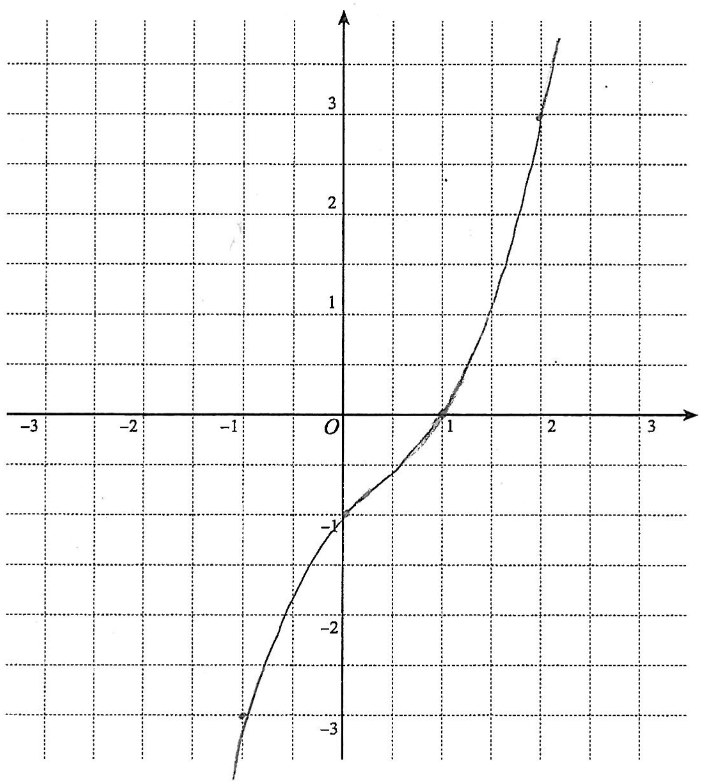


b) $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x - 1$

$$f'(x) = \frac{3}{2}x^2 - x + 1$$
$$= \frac{3}{2}\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{5}{6}$$

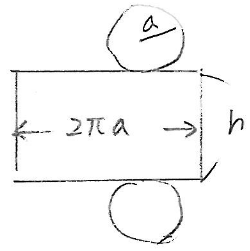
$\therefore$ $f'(x)$ は常に正

x	$\cdots$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	↗



5

6 底面の半径が a，高さが h の直円柱がある．



a) この直円柱の表面積を求めよ．

表面積 $S = 2\pi ah + 2\pi a^2$

b) この直円柱の表面積が 8π であるとき，この直円柱の体積を a を用いて表せ．

$S = 8\pi \iff 8\pi = 2\pi ah + 2\pi a^2 \iff h = \frac{4-a^2}{a}$

$\therefore$ 体積 $V = \pi a^2 h = \pi a^2 \cdot \frac{4-a^2}{a} = \pi a(4-a^2)$

c) 表面積が 8π である直円柱のうちで，体積が最大となるものの底面の半径と高さを求めよ．

$V = \pi(4a - a^3)$, $a > 0$

$\frac{dV}{da} = \pi(4 - 3a^2)$

a	0		$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	
$\frac{dV}{da}$		$+$	0	$-$
V		↗	最大	↘

左の増減表より $a = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ のとき V 最大

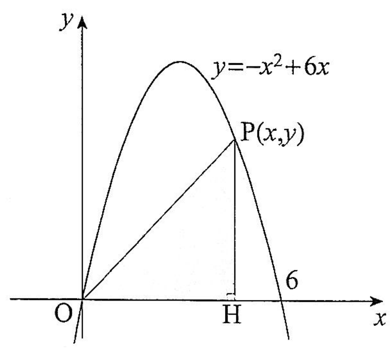
このとき $h = \frac{4 - \frac{4}{3}}{\frac{2\sqrt{3}}{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$

半径 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$，高さ $\frac{4\sqrt{3}}{3}$

7 右図のように関数

$$y = -x^2 + 6x \quad (0 \leqq x \leqq 6)$$

のグラフ上の点 $P(x, y)$ から x 軸に垂線 PH を下ろす．このとき，△POH の面積を最大にする x の値と面積の最大値を求めよ．



△POH の面積 $S = \frac{1}{2}OH \cdot HP$
$$= \frac{1}{2}x(-x^2 + 6x)$$
$$= -\frac{1}{2}x^3 + 3x^2$$

$\frac{dS}{dx} = -\frac{3}{2}x^2 + 6x = -\frac{3}{2}x(x-4)$

x	0		4		6
$\frac{dS}{dx}$	0	$+$	0	$-$	
S	0	↗		↘	0

左の増減表より $x = 4$ のとき S 最大

最大値 16