学籍番号：＿＿＿＿＿＿＿＿　氏名：＿＿＿＿＿＿＿＿

$\boxed{1}$ 次の関数で，各々の場合について平均変化率を求め，なるべく簡単な形で表せ．

a) $f(x) = 3x^2 + 1$，x が 1 から 3 まで変化するとき

$$\frac{f(3)-f(1)}{3-1} = \frac{28-4}{2} = 12$$

b) $f(x) = x^3 - 1$，x が -1 から 2 まで変化するとき

$$\frac{f(2)-f(-1)}{2-(-1)} = \frac{7-(-2)}{3} = 3$$

c) $f(x) = 3x^2 + 1$，x が a から $a+h$ まで変化するとき

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{(a+h)-a} = \frac{3(a+h)^2+1-(3a^2+1)}{h} = \frac{3a^2+6ah+h^2+1-3a^2-1}{h}$$

$$= 6a+3h$$

$\boxed{2}$ 関数 $f(x) = (2x+1)^2$ とするとき，次の微分係数を定義にしたがって求めよ．

a) $f'(-1) = \lim_{h\to 0}\frac{(2(-1+h)+1)^2-1}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(2h-1)^2-1}{h}$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{4h^2-4h}{h} = \lim_{h\to 0}(4h-4) = -4$$

b) $f'(b) = \lim_{h\to 0}\frac{(2(b+h)+1)^2-(2b+1)^2}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{((2b+1)+2h)^2-(2b+1)^2}{h}$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{4h(2b+1)+4h^2}{h} = \lim_{h\to 0}(4(2b+1)-4h) = 8b+4$$

$\boxed{3}$ 関数 $f(x) = x^3 - 1$ の $x = -1$ における微分係数 $f'(-1)$ を定義にしたがって求めよ．

$$f'(-1) = \lim_{h\to 0}\frac{(-1+h)^3-1-(-2)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\cancel{-1}+3h-3h^2+h^3\cancel{+1}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}(3-3h+h^2) = 3$$

$\boxed{4}$ 関数 $f(x) = x^2 + px + q$ において，次の問いに答えよ．

a) x が a から b まで変化するときの平均変化率を求めよ．

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{(b^2+pb+q)-(a^2+pa+q)}{b-a} = \frac{(b^2-a^2)+p(b-a)}{b-a}$$

$$= b+a+p$$

b) $x = c$ における微分係数を定義にしたがって求めよ．

$$f'(c) = \lim_{h\to 0}\frac{(c+h)^2+p(c+h)+q-(c^2+pc+q)}{h}$$

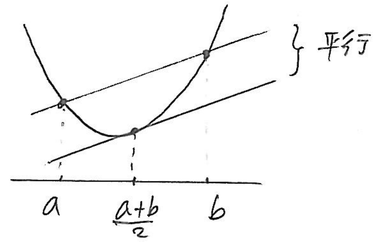
$$= \lim_{h\to 0}\frac{\cancel{c^2}+2ch+h^2\cancel{+pc}+ph\cancel{+q}\cancel{-c^2}\cancel{-pc}\cancel{-q}}{h} = \lim_{h\to 0}(2c+h+p)$$

$$= 2c+p$$

c) a) の平均変化率と b) の微分係数とが等しいとき，c を a，b で表せ

$$b+a+p = 2c+p$$

$$\therefore c = \frac{a+b}{2}$$



d) $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を定義にしたがって求めよ．

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2+p(x+h)+q-(x^2+px+q)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{2xh+h^2+ph}{h} = \lim_{h\to 0}(2x+h+p) = 2x+p$$

e) グラフ $y = f(x)$ の $(a, f(a))$ における接線と $(b, f(b))$ における接線の交点の x 座標を求めよ．

$(a, f(a))$ における接線　$y - f(a) = f'(a)(x-a)$

$$\Leftrightarrow y = (2a+p)(x-a) + a^2+pa+q$$

$$\Leftrightarrow y = (2a+p)x - a^2 + q \quad \text{①}$$

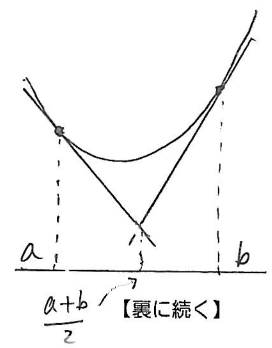
$(b, f(b))$ における接線　$y = (2b+p)x - b^2 + q \quad \text{②}$

①と②の交点を求める

$$(2a+p)x - a^2 \cancel{+q} = (2b+p)x - b^2 \cancel{+q}$$

$$2(a-b)x = a^2 - b^2$$

$$x = \frac{a^2-b^2}{2(a-b)} = \frac{a+b}{2}$$



【裏に続く】

5 関数 $f(x)=x^4$ の導関数 $f'(x)$ を定義にしたがって求めよ．

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^4-x^4}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{x^4}+4x^3h+6x^2h^2+4xh^3+h^4\cancel{-x^4}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}(4x^3+6x^2h+4xh^2+h^3)$$

$$=4x^3$$

6 関数 $f(x)=(ax+b)^3$ の導関数 $f'(x)$ を定義にしたがって求めよ．

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{(a(x+h)+b)^3-(ax+b)^3}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(ax+b+ah)^3-(ax+b)^3}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{(ax+b)^3}+3(ax+b)^2(ah)+3(ax+b)^2(ah)^2+(ah)^3\cancel{-(ax+b)^3}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}(3a(ax+b)^2+3a^2(ax+b)^2h+ah^2)$$

$$=3a(ax+b)^2$$

7 次の関数の導関数を求めよ．（まず，$f(x)$ を展開せよ．）

a) $f(x)=x^3-6x^2+3$

$f'(x)=3x^2-12x$

b) $f(x)=x(7x-3x^2)$

$=7x^2-3x^3$

$f'(x)=14x-9x^2$

c) $f(x)=(2x-1)(3x+5)$

$=6x^2+7x-5$

$f'(x)=12x+7$

d) $f(x)=(5x-1)^2$

$=25x^2-10x+1$

$f'(x)=50x-10$

e) $f(x)=(4x^2-1)(3x+2)$

$=12x^3+8x^2-3x-2$

$f'(x)=36x^2+16x-3$

f) $f(x)=(x+1)(x^2-x+1)$

$=x^3-1$

$f'(x)=3x^2$

8 次の関数を [ ] 内の変数で微分せよ．

a) $s=h+vt-\frac{1}{2}gt^2$ [t]

$\frac{ds}{dt}=v-gt$

b) $V=\frac{4}{3}\pi r^3$ [r]

$\frac{dV}{dr}=4\pi r^2$

9 次の関数 $f(x)$ について，$f'(x)$ を求め，$f'(x)>0$ となる x の範囲を求めよ．

a) $f(x)=x^3+3x^2+5$

$f'(x)=3x^2+6x$

$=3x(x+2)$

$f'(x)>0 \Leftrightarrow 3x(x+2)>0$

$\Leftrightarrow x<-2,\ x>0$

b) $f(x)=x^3-3x^2-9x+15$

$f'(x)=3x^2-6x-9$

$=3(x^2-2x-3)$

$=3(x-3)(x+1)$

$f'(x)>0 \Leftrightarrow 3(x-3)(x+1)>0$

$\Leftrightarrow x<-1,\ x>3$

【発展問題】

10 関数 $f(x)=\frac{1}{x}$ について，次の問いに答えよ．

a) x が 1 から $1+h$ まで変化するときの平均変化率を求めよ．

$$\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\frac{\frac{1}{1+h}-1}{h}=\frac{1}{h}\times\frac{1-(1+h)}{1+h}=\frac{-h}{h(1+h)}$$

$$=\frac{-1}{1+h}$$

b) $x=1$ における微分係数を求めよ．

$$f'(1)=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{-1}{1+h}=-1$$