1 ２つの関数 $u = f(x)$ と $v = g(x)$ の積として表される関数 $y = uv$ の導関数を求めたい．いま，x の増分を $\Delta x = h$ とすると，u の増分 Δu と v の増分 Δv はそれぞれ，

$$\Delta u = f(x+h) - f(x), \qquad \Delta v = g(x+h) - g(x)$$

と表せる．これより，

$$(*) \qquad f(x+\Delta x) = f(x) + \Delta u, \qquad g(x+\Delta x) = g(x) + \Delta v$$

と書ける．一方，y の増分 Δy は

$$\Delta y = f(x+\Delta x)g(x+\Delta x) - f(x)g(x)$$

と表されるので，これに $(*)$ を代入して，展開整理すると

$$\begin{aligned}\Delta y &= \big(f(x)+\Delta u\big)\big(g(x)+\Delta v\big) - f(x)g(x)\\ &= \\ &= \Delta u \cdot \boxed{} + \boxed{} \cdot \Delta v + \boxed{}\end{aligned}$$

となる．この両辺を Δx で割って，

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \boxed{}$$

を得る．このとき，

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u \Delta v}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\Delta v = f'(x)\cdot 0 = 0$$

である．

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}, \qquad \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{du}{dx}, \qquad \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x} = \frac{dv}{dx}$$

だから，積の微分公式

$$\frac{dy}{dx} = \boxed{}$$

を得る．これを，別の記号法を用いて

$$\frac{dy}{dx} = \big(f(x)g(x)\big)', \qquad \frac{du}{dx} = f'(x), \qquad \frac{dv}{dx} = g'(x)$$

と書き直すと，

$$\big(f(x)g(x)\big)' = \boxed{}$$

を得る．

2 積の微分公式を用いて次の関数を変数 x で微分せよ．

a) $f(x) = (x^2+3)(x^2-2x+2)$

$f'(x) =$

b) $f(x) = (x^2-x+1)(x+1)$

$f'(x) =$

3 $f(x)g(x)h(x) = \big(f(x)g(x)\big)h(x)$ であることと積の微分公式を用いて３つの関数の積の導関数 $\big(f(x)g(x)h(x)\big)'$ を求めよ．

4 関数 $g(x)$ に対し，関数 $\dfrac{1}{g(x)}$ の導関数を求めたい．そこで，$f(x) = \dfrac{1}{g(x)}$ とおき，$f'(x)$ を求める．分母を払った式

$$f(x)g(x) = 1$$

の両辺を微分すると，積の微分公式により

$$\boxed{} = 0$$

を得る．これを $f'(x)$ について解くと，

$$f'(x) =$$

となる．ここで，$f(x)$ を $\dfrac{1}{g(x)}$ で置き換えて整理し，すべてを $g(x)$ と $g'(x)$ で表して，次の公式を得る．

$$\left(\frac{1}{g(x)}\right)' = \boxed{}$$

【裏に続く】

$\boxed{5}$ $\dfrac{f(x)}{g(x)} = f(x) \times \dfrac{1}{g(x)}$ である．この右辺を積の微分公式を用いて微分し，問題 4 の微分公式を用いることにより，商の微分公式 $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)'$ を求めよ．

$\boxed{6}$ a) n が自然数であるとき，二項定理により

$$(x+h)^n = x^n + {}_nC_1 x^{n-1} h + {}_nC_2 x^{n-2} h^2 + \cdots + {}_nC_{n-1} x h^{n-1} + h^n$$

である．これを用い，関数 $f(x) = x^n$ の導関数を定義にしたがって求めよ．

b) 問題 4 で求めた公式において $g(x) = x^n$ とおくことにより，$\left(\dfrac{1}{x^n}\right)'$ を求め，なるべく簡単にせよ．

c) b) の結果を負の数の指数を用いて表すことにより $\left(x^{-n}\right)'$ を負の指数を用いた形で表せ．

$\boxed{7}$ 次の関数を変数 x で微分せよ．

a) $f(x) = \dfrac{1}{6x^3}$

$f'(x) =$

b) $f(x) = \dfrac{x^4 + 3x - 2}{x^2}$

$f'(x) =$

c) $f(x) = \dfrac{x-5}{x^2+5}$

$f'(x) =$

d) $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$

$f'(x) =$

e) $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - x + 1}$

$f'(x) =$

f) $f(x) = \dfrac{x^2 + 5x}{x - 4}$

$f'(x) =$