学籍番号：＿＿＿＿＿＿　氏名：＿＿＿＿＿＿

1 2つの関数 $u = f(x)$ と $v = g(x)$ の積として表される関数 $y = uv$ の導関数を求めたい．いま，x の増分を $\Delta x = h$ とすると，u の増分 Δu と v の増分 Δv はそれぞれ，

$$\Delta u = f(x+h) - f(x), \qquad \Delta v = g(x+h) - g(x)$$

と表せる．これより，

(∗) $$f(x+\Delta x) = f(x) + \Delta u, \qquad g(x+\Delta x) = g(x) + \Delta v$$

と書ける．一方，y の増分 Δy は

$$\Delta y = f(x+\Delta x)g(x+\Delta x) - f(x)g(x)$$

と表されるので，これに (∗) を代入して，展開整理すると

$$\Delta y = \big(f(x)+\Delta u\big)\big(g(x)+\Delta v\big) - f(x)g(x)$$
$$= f(x)g(x) + \Delta u \cdot g(x) + f(x)\Delta v + \Delta u \Delta v - f(x)g(x)$$
$$= \Delta u \cdot \boxed{g(x)} + \boxed{f(x)} \cdot \Delta v + \boxed{\Delta u \cdot \Delta v}$$

となる．この両辺を Δx で割って，

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \boxed{\frac{\Delta u}{\Delta x} g(x) + f(x)\frac{\Delta v}{\Delta x} + \frac{\Delta u \cdot \Delta v}{\Delta x}}$$

を得る．このとき，

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u \Delta v}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \Delta v = f'(x) \cdot 0 = 0$$

である．

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}, \qquad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{du}{dx}, \qquad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = \frac{dv}{dx}$$

だから，積の微分公式

$$\frac{dy}{dx} = \boxed{\frac{du}{dx} \cdot v + u \cdot \frac{du}{dx}}$$

を得る．これを，別の記号法を用いて

$$\frac{dy}{dx} = \big(f(x)g(x)\big)', \qquad \frac{du}{dx} = f'(x), \qquad \frac{dv}{dx} = g'(x)$$

と書き直すと，

$$\big(f(x)g(x)\big)' = \boxed{f'(x)g(x) + f(x)g'(x)}$$

を得る．

2 積の微分公式を用いて次の関数を変数 x で微分せよ．

a) $f(x) = (x^2+3)(x^2-2x+2)$

$$f'(x) = 2x(x^2-2x+2) + (x^2+3)(2x-2)$$
$$= 4x^3 - 6x^2 + 10x - 6$$

b) $f(x) = (x^2-x+1)(x+1)$

$$f'(x) = (2x-1)(x+1) + (x^2-x+1)$$
$$= 3x^2$$

3 $f(x)g(x)h(x) = \big(f(x)g(x)\big)h(x)$ であることと積の微分公式を用いて 3 つの関数の積の導関数 $\big(f(x)g(x)h(x)\big)'$ を求めよ．

$$\big(f(x)g(x)h(x)\big)' = \big(f(x)g(x)\big)'h(x) + f(x)g(x)h'(x)$$
$$= \big(f'(x)g(x) + f(x)g'(x)\big)h(x) + f(x)g(x)h'(x)$$
$$= f'(x)g(x)h(x) + f(x)g'(x)h(x) + f(x)g(x)h'(x)$$

4 関数 $g(x)$ に対し，関数 $\dfrac{1}{g(x)}$ の導関数を求めたい．そこで，$f(x) = \dfrac{1}{g(x)}$ とおき，$f'(x)$ を求める．分母を払った式

$$f(x)g(x) = 1$$

の両辺を微分すると，積の微分公式により

$$\boxed{f'(x)g(x) + f(x)g'(x)} = 0$$

を得る．これを $f'(x)$ について解くと，

$$f'(x) = \frac{-f(x)g'(x)}{g(x)}$$

となる．ここで，$f(x)$ を $\dfrac{1}{g(x)}$ で置き換えて整理し，すべてを $g(x)$ と $g'(x)$ で表して，次の公式を得る．

$$\left(\frac{1}{g(x)}\right)' = \boxed{-\frac{g'(x)}{g(x)^2}}$$

5 $\frac{f(x)}{g(x)} = f(x) \times \frac{1}{g(x)}$ である．この右辺を積の微分公式を用いて微分し，問題６の微分公式を用いることにより，商の微分公式 $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'$ を求めよ．

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \left(f(x)\cdot\frac{1}{g(x)}\right)' = f'(x)\frac{1}{g(x)} + f(x)\left(\frac{1}{g(x)}\right)'$$

$$= \frac{f'(x)}{g(x)} + f(x)\frac{-g'(x)}{g(x)^2} = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$$

6 a) n が自然数であるとき，二項定理により

$$(x+h)^n = x^n + {}_nC_1x^{n-1}h + {}_nC_2x^{n-2}h^2 + \cdots + {}_nC_{n-1}xh^{n-1} + h^n$$

である．これを用い，関数 $f(x) = x^n$ の導関数を定義にしたがって求めよ．

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n - x^n}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\cancel{x^n} + {}_nC_1x^{n-1}h + {}_nC_2x^{n-2}h^2 + \cdots + {}_nC_{n-1}xh^{n-1} + h^n \cancel{- x^n}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\left({}_nC_1x^{n-1} + {}_nC_2x^{n-2}h + \cdots + {}_nC_{n-1}xh^{n-2} + h^{n-1}\right) = nx^{n-1}$$

b) 問題４で求めた公式において $g(x) = x^n$ とおくことにより，$\left(\frac{1}{x^n}\right)'$ を求め，なるべく簡単にせよ．

$$\left(\frac{1}{x^n}\right)' = \frac{nx^{n-1}}{(x^n)^2} = \frac{nx^{n-1}}{x^{2n}} = \frac{n}{x^{n+1}}$$

c) b) の結果を負の数の指数を用いて表すことにより $(x^{-n})'$ を負の指数を用いた形で表せ．

$$(x^{-n})' = \left(\frac{1}{x^n}\right)' = \frac{n}{x^{n+1}} = nx^{-n-1}$$

7 次の関数を変数 x で微分せよ．

a) $f(x) = \frac{1}{6x^3} = \frac{1}{6}x^{-3}$

$$f'(x) = \frac{1}{6}\times(-3)x^{-4}$$

$$= -\frac{1}{2}x^{-4}$$

b) $f(x) = \frac{x^4+3x-2}{x^2} = x^2 + \frac{3}{x} - \frac{2}{x^2}$

$$f'(x) = 2x - \frac{3}{x^2} + \frac{4}{x^3}$$

$$= \frac{2x^4 - 3x + 4}{x^3}$$

c) $f(x) = \frac{x-5}{x^2+5}$

$$f'(x) = \frac{(x-5)'(x^2+5) - (x-5)(x^2+5)'}{(x^2+5)^2}$$

$$= \frac{x^2+5 - 2x(x-5)}{(x^2+5)^2}$$

$$= \frac{-x^2+10x+5}{(x^2+5)^2}$$

d) $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1} = 1 - \frac{2}{x^2+1}$

$$f'(x) = -\frac{-2(x^2+1)'}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{4x}{(x^2+1)^2}$$

e) $f(x) = \frac{x}{x^2-x+1}$

$$f'(x) = \frac{(x)'(x^2-x+1) - x(x^2-x+1)'}{(x^2-x+1)^2}$$

$$= \frac{x^2-x+1 - x(2x-1)}{(x^2-x+1)^2}$$

$$= \frac{-x^2+1}{(x^2-x+1)^2}$$

f) $f(x) = \frac{x^2+5x}{x-4}$

$$f'(x) = \frac{(x^2+5x)'(x-4) - (x^2+5x)(x-4)'}{(x-4)^2}$$

$$= \frac{(2x+5)(x-4) - (x^2+5x)}{(x-4)^2}$$

$$= \frac{x^2-8x-20}{(x-4)^2}$$