

微分積分 I — 期末試験

2012 年 7 月 25 日

時間 60 分

- 筆記用具以外の持ち込みは不可.
- 最終的な答えだけを書くのではなく途中の計算や説明も書くこと. これがない場合, 大幅な減点をすることもある.

1 $f(x) = (x + 2)e^{-2x-2}$ とおく. このとき,

$$f'(x) = -(2x + 3)e^{-2x-2} \quad f''(x) = 4(x + 1)e^{-2x-2} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

となることを知って, 以下の問いに答えよ.

- $f(x)$ の増減とグラフの凹凸を調べるための増減表を解答用紙の所定の場所に書け.
- $f(x)$ の極大値・極小値とグラフの変曲点を求めよ.
- グラフ $y = f(x)$ の概形を解答用紙の座標平面内に描け.

[必要ならば $e \doteq 2.718$, $\frac{1}{e^2} \doteq 0.135$ を用いてよい.]

2 $f(x) = \sqrt{-\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}}$ とする. 以下の問いに答えよ.

- 関数 $y = f(x)$ の定義域と値域を求めよ
- $y = f(x)$ の逆関数 $y = f^{-1}(x)$ を求めよ.
- 逆関数 $y = f^{-1}(x)$ の定義域と値域を求めよ.
- x が 1 から 3 まで変化するときの $f(x)$ の平均変化率を求めよ.
- $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を求めよ.
- $y = f(x)$ のグラフの $(1, 1)$ における接線の方程式を求めよ.
- $y = f(x)$ のグラフ, $y = f(x)$ の $(1, 1)$ における接線, 逆関数 $y = f^{-1}(x)$ のグラフの 3 つを解答用紙の座標平面内に描け.

3 $f(x) = \frac{x+1}{x+2}$ とする. 以下の問いに答えよ.

- $x = -1$ における $f(x)$ の微分係数 $f'(-1)$ を極限を直接計算することによって求めよ.
- $y = f(x)$ のグラフは $y = \frac{k}{x}$ のグラフを x 軸方向に p , y 軸方向に q だけ平行移動した曲線である. k , p , q は何かを答えよ.
- $y = f(x)$ のグラフの $(-1, 0)$ における接線の方程式を求めよ.
- $y = f(x)$ のグラフ, $y = f(x)$ の $(-1, 0)$ における接線, 直線 $y = -\frac{1}{3}x + 1$ の 3 つを解答用紙の座標平面内に描け.
- グラフを利用して不等式 $\frac{x+1}{x+2} \geq -\frac{1}{3}x + 1$ を解け.

【裏に続く】

4 次の各々の関数の導関数を求めよ.

a) $f(x) = (x^2 - x + 1)^5$

b) $f(x) = \frac{x-5}{x^2+5}$

c) $f(x) = x\sqrt{2x+1}$

d) $f(x) = \sqrt[3]{1-3x^2}$

e) $f(x) = (x+2)e^{-\frac{x^2}{2}}$

f) $f(x) = x^2(\log x)^3$

5 関数 $f(x) = x - x \log x$ の $\frac{1}{e} \leq x \leq e$ における最大値, 最小値を求めよ.

6 長さ 2 の線分 AB を直径とする半円の周上の動点を $P(x, y)$ とし, P から AB 下ろした垂線の足を H とする.

a) $\triangle APH$ の面積 S を x で表せ.

b) S の最大値を求めよ.

