学籍番号：__________　氏名：__________

$\boxed{1}$ $f(x) = (x+2)e^{-2x-2}$ とする．$f(x)$ の増減とグラフ $y = f(x)$ の凹凸を調べ，グラフの概形を描け．また，$f(x)$ の極大値・極小値とグラフの変曲点を求めよ．

$$f'(x) = e^{-2x-2} + (x+2)e^{-2x} \times (-2) = -(2x+3)e^{-2x-2}$$

$$f''(x) = -2e^{-2x-2} - (2x+3)e^{-2x-2} \times (-2) = 4(x+1)e^{-2x-2}$$

$f'(x)=0 \iff 2x+3=0 \iff x=-\frac{3}{2}$

$f'(x)>0 \iff -(2x+3)>0 \iff x<-\frac{3}{2}$

$f''(x)=0 \iff x+1=0 \iff x=-1$

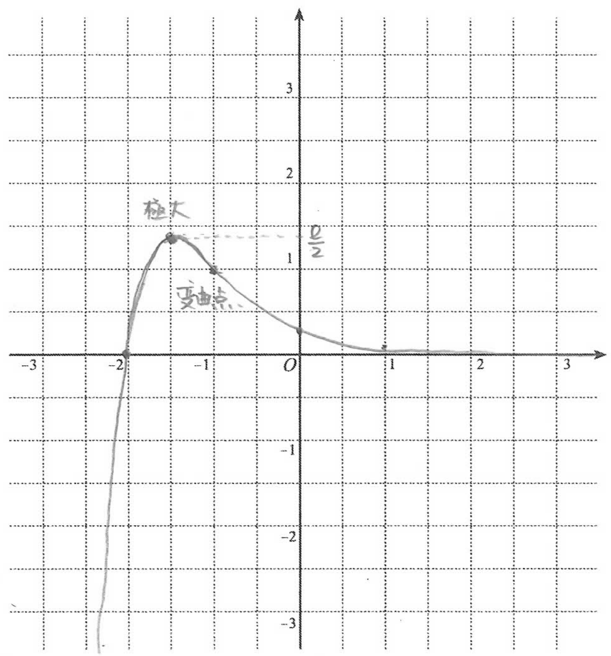
$f''(x)>0 \iff x+1>0 \iff x>-1$

x	$\cdots$	$-\frac{3}{2}$	$\cdots$	-1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$f''(x)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$\frac{e}{2}$	$\searrow$	1	$\searrow$
		極大		変曲点	

極大値 $\frac{e}{2}$ $\left(x=-\frac{3}{2}\right)$

極小値 なし

変曲点 $x=-1$ $((-1, 1))$



【裏に続く】

2 a) $x > 1$ のとき $2\sqrt{x} > \log x$ であることを示せ.

$f(x) = 2\sqrt{x} - \log x$ とおくと $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}} - \dfrac{1}{x} = \dfrac{\sqrt{x}-1}{x}$

x	1	$\cdots$
$f'(x)$	0	$+$
$f(x)$	2	$\nearrow$

$f(x)$ は $x \geqq 1$ においては

最小値 2 を $x=1$ のときにとる

とくに $f(x) \geqq 2 > 0 \ (x > 1)$

$\therefore\ 2\sqrt{x} > \log x \ (x > 1)$

b) a) を用い $x > 1$ のとき $\dfrac{2}{\sqrt{x}} > \dfrac{\log x}{x} > 0$ であることを示し, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\log x}{x}$ を求めよ.

$x > 1$ として $2\sqrt{x} > \log x$ の両辺を x で割ると

$$\frac{2}{\sqrt{x}} > \frac{\log x}{x} \ (>0)$$

$x \to +\infty$ としたとき, $\sqrt{x} \to +\infty$ だから, $\dfrac{2}{\sqrt{x}} \to 0 \ (x \to +\infty)$

はさみうちの原理により, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\log x}{x} = 0$

c) 関数 $f(x) = \dfrac{\log x}{x}$ の増減表をかけ. (凹凸は調べなくてよい.)

$f'(x) = \dfrac{\frac{1}{x}\cdot x - \log x}{x^2} = \dfrac{1-\log x}{x^2}$, $f'(x)=0 \Leftrightarrow \log x = 1$

$\Leftrightarrow x = e$

x	0	$\cdots$	e	$\cdots$
$f'(x)$	$\times$	$+$	0	$-$
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$

d) π^e と e^π はどちらが大きいか. [ヒント: $\dfrac{\log \pi}{\pi}$ と $\dfrac{\log e}{e}$ のどちらが大きいかが c) によりわかる.]

$e < \pi$ だから, c) の増減表より $f(e) > f(\pi)$

すなわち $\dfrac{\log \pi}{\pi} < \dfrac{\log e}{e}$

$\therefore\ e \log \pi < \pi \log e$

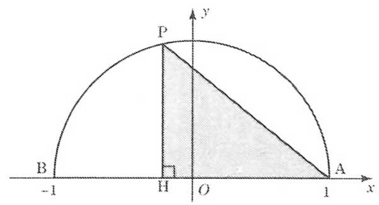
$\log \pi^e < \log e^\pi$

$\therefore\ \pi^e < e^\pi$

3 長さ 2 の線分 AB を直径とする半円の周上の動点を $P(x, y)$ とし, P から AB 下ろした垂線の足を H とする.

a) $\triangle$APH の面積 S を x で表せ.

b) S の最大値を求めよ.



$\overline{AH} = 1 - x$

$\overline{PH} = y$

$x^2 + y^2 = 1$; $y > 0$ だから $y = \sqrt{1-x^2}$

$S = \triangle APH = \frac{1}{2}(1-x)\sqrt{1-x^2}$

$$\frac{dS}{dx} = \frac{1}{2}(-1)\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}(1-x)\frac{(1-x^2)'}{2\sqrt{1-x^2}}$$

$$= -\frac{1}{2}\sqrt{1-x^2} - \frac{(1-x)x}{2\sqrt{1-x^2}} = \frac{-(1-x^2)-(x-x^2)}{2\sqrt{1-x^2}}$$

$$= \frac{-(1+x-2x^2)}{2\sqrt{1-x^2}} = \frac{(x-1)(2x+1)}{2\sqrt{1-x^2}}$$

x	-1		$-\frac{1}{2}$		1
$\frac{dS}{dx}$	$\times$	$+$	0	$-$	$\times$
S	0	$\nearrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{8}$	$\searrow$	0

S は $x = -\frac{1}{2}$ のとき最大値 $\frac{3\sqrt{3}}{8}$ をとる