$\boxed{1}$ $f(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - x^2$ とする.

a) $f(-3), f(-2), f(-1), f(0), f(1), f(2), f(3)$ をそれぞれ求めよ.

$f(-3) = \frac{9}{4}$, $f(-2) = -\frac{8}{3}$, $f(-1) = -\frac{13}{12}$, $f(0) = 0$

$f(1) = -\frac{5}{12}$　$f(2) = \frac{8}{3}$　$f(3) = \frac{81}{4}$

b) $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ と２次導関数 $f''(x)$ を求めよ.

$f'(x) = x^3 + x^2 - 2x$

$f''(x) = 3x^2 + 2x - 2$

c) $f'(x) = 0$ となる x と, $f'(x) > 0$ となる x の範囲を求めよ.

$f'(x) = x^3 + x^2 - 2x = x(x-1)(x+2) = 0 \iff x = 0, 1, -2$

$f'(x) = x(x-1)(x+2) > 0 \iff -2 < x < 0, \ x > 1$

d) $f''(x) = 0$ となる x と, $f''(x) > 0$ となる x の範囲を求めよ.

$f''(x) = 3x^2 + 2x - 2 = 0$　$x = \frac{-1 \pm \sqrt{7}}{3}$

$f''(x) = 3x^2 + 2x - 2 > 0 \iff x < \frac{-1-\sqrt{7}}{3}, \ x > \frac{-1+\sqrt{7}}{3}$

e) $f(x)$ の増減表を完成させよ.（増減だけでなくグラフの凹凸も調べること.）

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	$\frac{-1-\sqrt{7}}{3}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{-1+\sqrt{7}}{3}$	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f''(x)$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$-\frac{8}{3}$	$\nearrow$		$\nearrow$	0	$\searrow$		$\searrow$	$-\frac{5}{12}$	$\nearrow$
		極小		変曲点.		極大		変曲点		極小	

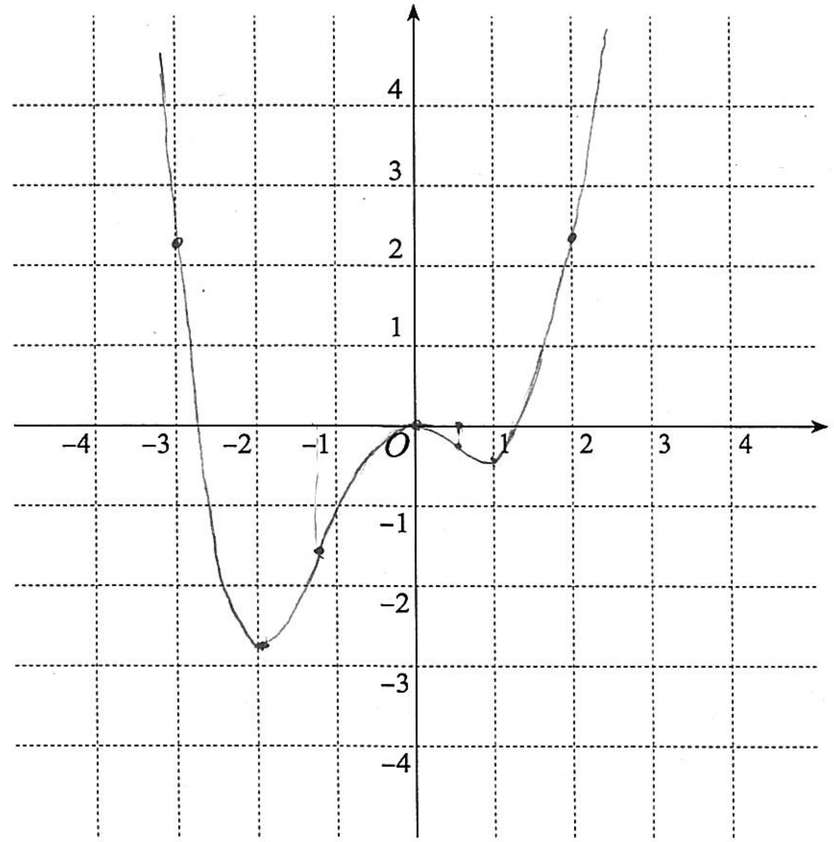
f) $f(x)$ が極大・極小となる x の値を求めよ. また, $f(x)$ の極大値および極小値を小数で表せ. ただし, 答えは小数第３位を四捨五入して小数第２位まで求めること.

極大：$x = 0$,　極大値　$f(0) = 0$

極小：$x = -2$,　極小値　$f(-2) = -\frac{8}{3} = -2.67$

〃　$x = 1$　〃　$f(1) = -\frac{5}{12} = -0.417$

g) $y = f(x)$ のグラフを, ここまでの結果を反映させて, なるべく丁寧に描け.



2 $f(x) = 4xe^{-x^2/2}$ とする．

a) $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ と 2 次導関数 $f''(x)$ を求めよ．

$$f'(x) = 4e^{-\frac{x^2}{2}} + 4x\,e^{-\frac{x^2}{2}}\cdot(-x) = 4(1-x^2)\,e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$f''(x) = 4(-2x)\,e^{-\frac{x^2}{2}} + 4(1-x^2)\,e^{-\frac{x^2}{2}}\times(-x)$$

$$= 4x(x^2-3)\,e^{-\frac{x^2}{2}}$$

b) $f'(x) = 0$ となる x と，$f'(x) > 0$ となる x の範囲を求めよ．

$$f'(x) = 4(1-x^2)\,e^{-\frac{x^2}{2}} = 0 \iff 1-x^2 = 0$$
$$\iff x = \pm 1$$

$$f'(x) = 4(1-x^2)\underbrace{e^{-\frac{x^2}{2}}}_{\text{正}} > 0 \iff 1-x^2 > 0$$
$$\iff -1 < x < 1$$

c) $f''(x) = 0$ となる x と，$f''(x) > 0$ となる x の範囲を求めよ．

$$f''(x) = 4x(x^2-3)\,e^{-\frac{x^2}{2}} = 0 \iff x(x^2-3) = 0$$
$$\iff x = 0, \pm\sqrt{3}$$

$$f''(x) = 4x(x^2-3)\,e^{-\frac{x^2}{2}} > 0 \iff x(x^2-3) > 0$$
$$\iff -\sqrt{3} < x < 0,\ x > \sqrt{3}$$

d) $f(x)$ の増減表を完成させよ．（増減だけでなくグラフの凹凸も調べること．）

x	$\cdots$	$-\sqrt{3}$	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	$\sqrt{3}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘		↘	$-4e^{-\frac{1}{2}}$	↗		↗	$4e^{-\frac{1}{2}}$	↘		↘
		変曲点		極小		変曲点		極大		変曲点	

e) $f(x)$ が極大・極小となる点，および変曲点を求めよ．

極大：$x = 1$

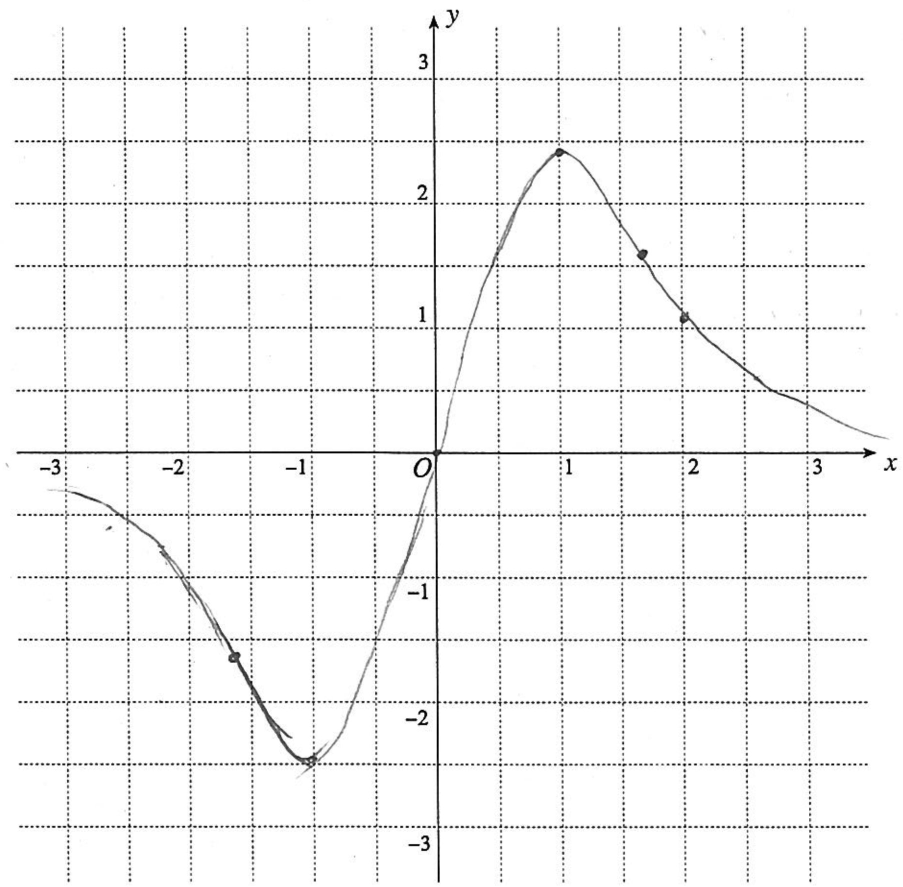
極小：$x = -1$

変曲点，$x = \pm\sqrt{3}$

f) $e^{-1/2} \fallingdotseq 0.607$，$e^{-3/2} \fallingdotseq 0.223$，$e^{-2} \fallingdotseq 0.135$ であるとして，$f(\pm 1)$, $f\left(\pm\sqrt{3}\right)$, $f(\pm 2)$ の値を概算せよ．

$$f(\pm 1) \fallingdotseq \pm 4 \times 0.607 = \pm 2.428$$
$$f(\pm\sqrt{3}) \fallingdotseq 4\sqrt{3} \times 0.223 = \pm 1.545$$
$$f(\pm 2) \fallingdotseq \pm 8 \times 0.135 = \pm 1.08$$

g) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$，$\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$ であることが知られている．これと，ここまでの結果を用いて，$f(x)$ のグラフを描け．



2014 年 12 月 16 日