1 次の関数の第2次導関数を求めよ．

a) $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1} = 1 - \dfrac{2}{x+1}$

$f'(x) = \dfrac{2}{(x+1)^2}$

$f''(x) = \dfrac{-4}{(x+1)^3}$

b) $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$

$f'(x) = \dfrac{1+x^2 - x\cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \dfrac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$

$f''(x) = \dfrac{(1-x^2)'(1+x^2)^2 - (1-x^2)((1+x^2)^2)'}{(1+x^2)^4}$

$= \dfrac{-2x(1+x^2) - 2\cdot 2x(1-x^2)}{(1+x^2)^3}$

$= \dfrac{2x(x^2-3)}{(1+x^2)^3}$

c) $f(x) = xe^{-2x}$

$f'(x) = (x)'e^{-2x} + x(e^{-2x})'$

$= e^{-2x} + x e^{-2x}(-2x)'$

$= (1-2x)e^{-2x}$

$f''(x) = (1-2x)'e^{-2x} + (1-2x)(e^{-2x})'$

$= -2e^{-2x} - 2(1-2x)e^{-2x}$

$= -4(1-x)e^{-2x}$

d) $f(x) = e^{-x^2}$

$f'(x) = -2x e^{-x^2}$

$f''(x) = -2e^{-x^2} - 2x e^{-x^2}(-2x)$

$= -2(1-2x^2)e^{-x^2}$

e) $f(x) = \log(x^2+1)$

$f'(x) = \dfrac{(x^2+1)'}{(x^2+1)} = \dfrac{2x}{x^2+1}$

$f''(x) = \dfrac{2(x^2+1) - 2x(2x)}{(x^2+1)^2}$

$= \dfrac{2(1-x^2)}{(x^2+1)^2}$

f) $f(x) = e^x \log x$

$f'(x) = e^x \log x + e^x \cdot \dfrac{1}{x}$

$= e^x\left(\log x + \dfrac{1}{x}\right)$

$f''(x) = e^x\left(\log x + \dfrac{1}{x}\right) + e^x\left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2}\right)$

$= e^x\left(\log x + \dfrac{2}{x} - \dfrac{1}{x^2}\right)$

2 $f(x) = x\sqrt{4-x^2}$ とする．

a) 関数 $f(x)$ の定義域を求めよ．

$4 - x^2 \geqq 0 \iff -2 \leqq x \leqq 2$

b) 導関数 $f'(x)$ を求めよ．

$f'(x) = \sqrt{4-x^2} + x\dfrac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}} = \dfrac{4-x^2-x^2}{\sqrt{4-x^2}} = \dfrac{2(2-x^2)}{\sqrt{4-x^2}}$

c) $f'(x) = 0$ となる x と，$f'(x) > 0$ となる範囲を求めよ．

$f'(x)$ は $-2 < x < 2$ で定義され，この範囲では $\sqrt{4-x^2} > 0$

$\therefore\ f'(x) = 0 \iff 2 - x^2 = 0 \iff x = \pm\sqrt{2}$

$f'(x) > 0 \iff 2 - x^2 > 0 \iff -\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$

d) $f(x)$ が定義域内での増減表を書け．

x	-2	$\cdots$	$-\sqrt{2}$	$\cdots$	$\sqrt{2}$	$\cdots$	2
$f'(x)$	×	$-$	0	$+$	0	$-$	×
$f(x)$	0	↘	-2	↗	2	↘	0

e) $f(x)$ の定義域内での最大値，最小値を求めよ．

最大値 2 $(x = \sqrt{2})$

最小値 -2 $(x = -\sqrt{2})$

3 $f(x) = xe^{-x}$ とする.

a) 導関数 $f'(x)$ を求めよ.

$$f'(x) = (x)'e^{-x} + x(e^{-x})' = e^{-x} + x e^{-x}(-x)'$$
$$= e^{-x} - x e^{-x} = (1-x)e^{-x}$$

b) 微分係数 $f'(0)$ を求めよ.

$$f'(0) = (1-0)e^{-0} = 1$$

c) 曲線 $y = xe^{-x}$ の原点 $(0, 0)$ における接線の方程式を求めよ.

接線: $y - 0 = f'(0)(x-0)$

$y = x$.

d) 関数 $f(x) = xe^{-x}$ の増減を調べ, 増減表を完成させよ.

$f'(x) = (1-x)e^{-x}$　　$e^{-x} > 0$ だから

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow (1-x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$

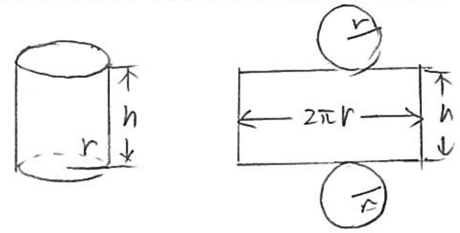
$f'(x) > 0 \Leftrightarrow (1-x) > 0 \Leftrightarrow x < 1$

x	---	1	---
$f'(x)$	+	0	−
$f(x)$	↗	e^{-1}	↘

極大

4 直円柱の形をした缶詰の容器の容積が V で一定であるとき, その表面積 S を最小にしたい.

a) 底面の半径を r, 高さ h とするとき, S と V をそれぞれ r と h で表せ.



$S = 2\pi r^2 + 2\pi rh$

$V = \pi r^2 h$

b) S を V と r で表せ.

$V = \pi r^2 h$ より $h = \dfrac{V}{\pi r^2}$

$$\therefore S = 2\pi r^2 + 2\pi rh = 2\pi r^2 + 2\cancel{\pi} r \frac{V}{\cancel{\pi} r^2}$$
$$= 2\pi r^2 + \frac{2V}{r}$$

c) S を r の関数とみて, S の増減を調べよ.

$\dfrac{dS}{dr} = 4\pi r - \dfrac{2V}{r^2}$　　$\dfrac{dS}{dr} = 0 \Leftrightarrow 4\pi r = \dfrac{2V}{r^2} \Leftrightarrow r^3 = \dfrac{V}{2\pi}$

$\Leftrightarrow r = \sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}$　　$(r > 0$ より$)$

$\dfrac{dS}{dr} > 0 \Leftrightarrow r^3 > \dfrac{V}{2\pi} \Leftrightarrow r > \sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}$

r	0		$\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$	
$\frac{dS}{dr}$	X	−	0	+
S		↘		↗

d) S が最小になるときの r の値を求めよ. また, そのときの h の値も求めよ.

S は $r = \sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}$ のとき最小.

このとき $h = \dfrac{V}{\pi\left(\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}\right)^2} = \sqrt[3]{\dfrac{4V}{\pi}}$