1　2つの関数 $y = f(u)$ と $u = g(x)$ の合成関数 $y = f\big(g(x)\big)$ の導関数を求めたい.
いま，u の増分 Δu に対する y の増分 Δy は

$$\Delta y = f(u + \Delta u) - f(u)$$

と書ける．この両辺を x の増分を Δx で割ると，

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(u + \Delta u) - f(u)}{\Delta x}$$

となる．これは

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(u + \Delta u) - f(u)}{\Delta u} \cdot \frac{\boxed{}}{\boxed{}}$$

と書き直せる．いま

$$\lim_{\Delta u \to 0} \frac{f(u + \Delta u) - f(u)}{\Delta u} = f'(u)$$

であり，$\Delta x \to 0$ としたとき $\Delta u \to 0$ だから，

$$\begin{aligned}
\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{f(u + \Delta u) - f(u)}{\Delta u} \cdot \frac{\boxed{}}{\boxed{}} \right) \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(u + \Delta u) - f(u)}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\boxed{}}{\boxed{}} \\
&= \lim_{\Delta u \to 0} \frac{f(u + \Delta u) - f(u)}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\boxed{}}{\boxed{}} \\
&= f'(u) \cdot \boxed{}
\end{aligned}$$

ここで，$u = g(x)$ だから，$f'(u) = \boxed{}$ と書き直せる．また，$\displaystyle\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \big(f\big(g(x)\big)\big)'$ であるから，
合成関数の微分公式

$$\big(f\big(g(x)\big)\big)' = \boxed{}$$

を得る.

2　合成関数の微分法を用いて次の関数を変数 x で微分せよ.

a） $f(x) = (2x + 3)^3$

$f'(x) =$

b） $f(x) = (x^2 - x + 1)^5$

$f'(x) =$

学籍番号 : ____________________　氏名 : ________________________

$\boxed{3}$ $\left(f\left(g\left(h(x)\right)\right)\right)'$ を求めよ.

$\boxed{4}$ a) 関数 $f(x) = \dfrac{1}{x}$ の導関数を定義にしたがって求めよ.（復習）

b) 合成関数の微分法 $\left(f\left(g(x)\right)\right)' = f'\left(g(x)\right)g'(x)$ において, $f(x) = \dfrac{1}{x}$ とする. このとき, $\left(f\left(g(x)\right)\right)'$ を $g(x)$ および $g'(x)$ を用いて表せ.

c) $\left(\dfrac{1}{g(x)}\right)'$ に関する微分公式を再度導け.

【裏に続く】

$\boxed{5}$ 関数 $f(x)$ とその逆関数 $f^{-1}(x)$ は $f\left(f^{-1}(x)\right) = x$ をみたす．この両辺を微分し，それを逆関数の導関数 $\left(f^{-1}(x)\right)'$ について解くことにより，$\left(f^{-1}(x)\right)'$ の微分公式を求めよ.

$\boxed{6}$ $f(x) = x^n$ とすると，関数 $\sqrt[n]{x}$ は，関数 $f(x)$ の逆関数である．すなわち $f^{-1}(x) = \sqrt[n]{x}$ である.
問題 5 で得られた逆関数の微分公式を用いて $\left(\sqrt[n]{x}\right)' = \dfrac{1}{n\left(\sqrt[n]{x}\right)^{n-1}}$ であることを示せ.

$\boxed{7}$ 問題 6 の結果を分数指数を用いて表すことにより $\left(x^{\frac{1}{n}}\right)'$ の微分公式を求めよ.

$\boxed{8}$ $x^{\frac{m}{n}} = (x^m)^{\frac{1}{n}}$ であることを用いて $\left(x^{\frac{m}{n}}\right)'$ を求めよ.

$\boxed{9}$ 次の関数を変数 x で微分せよ.

a) $f(x) = \dfrac{1}{x\sqrt{x}}$

$f'(x) =$

b) $f(x) = \left(x^2 - \dfrac{1}{x}\right)^3$

$f'(x) =$

c) $f(x) = \sqrt{16 - x^2}$

$f'(x) =$

d) $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - x + 1}$

$f'(x) =$

e) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$

$f'(x) =$

f) $f(x) = x^3\sqrt{2x + 1}$

$f'(x) =$