1 2つの関数 $y=f(u)$ と $u=g(x)$ の合成関数 $y=f\left(g(x)\right)$ の導関数を求めたい．
いま，u の増分 Δu に対する y の増分 Δy は

$$\Delta y = f(u+\Delta u) - f(u)$$

と書ける．この両辺を x の増分を Δx で割ると，

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(u+\Delta u)-f(u)}{\Delta x}$$

となる．これは

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(u+\Delta u)-f(u)}{\Delta u}\cdot\frac{\boxed{\Delta u}}{\boxed{\Delta x}}$$

と書き直せる．いま

$$\lim_{\Delta u\to 0}\frac{f(u+\Delta u)-f(u)}{\Delta u} = f'(u)$$

であり，$\Delta x \to 0$ としたとき $\Delta u \to 0$ だから，

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{f(u+\Delta u)-f(u)}{\Delta u}\cdot\frac{\boxed{\Delta u}}{\boxed{\Delta x}}\right)\\ &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(u+\Delta u)-f(u)}{\Delta u}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\boxed{\Delta u}}{\boxed{\Delta x}}\\ &= \lim_{\Delta u\to 0}\frac{f(u+\Delta u)-f(u)}{\Delta u}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\boxed{\Delta u}}{\boxed{\Delta x}}\\ &= f'(u)\cdot\boxed{g'(x)}\end{aligned}$$

ここで，$u=g(x)$ だから，$f'(u)=\boxed{f'(g(x))}$ と書き直せる．また，$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \left(f\left(g(x)\right)\right)'$ であるから，
合成関数の微分公式

$$\left(f\left(g(x)\right)\right)' = \boxed{f'(g(x))\,g'(x)}$$

を得る．

2 合成関数の微分法を用いて次の関数を変数 x で微分せよ．

a) $f(x)=(2x+3)^3$

$$f'(x) = 3(2x+3)^2\cdot(2x+3)' = 6(2x+3)^2$$

b) $f(x)=(x^2-x+1)^5$

$$f'(x) = 5(x^2-x+1)^4(x^2-x+1)' = 5(2x-1)(x^2-x+1)^4$$

3 $\left(f\left(g\left(h(x)\right)\right)\right)'$ を求めよ．

$$\begin{aligned}(f(g(h(x))))' &= f'(g(h(x)))\cdot(g(h(x)))'\\ &= f'(g(h(x)))\,g'(h(x))\,h'(x)\end{aligned}$$

4 a) 関数 $f(x)=\frac{1}{x}$ の導関数を定義にしたがって求めよ．（復習）

$$\begin{aligned}f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\cdot\frac{x-(x+h)}{(x+h)x} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\cdot\frac{-h}{x(x+h)}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{-1}{x(x+h)} = -\frac{1}{x^2}\end{aligned}$$

b) 合成関数の微分法 $\left(f\left(g(x)\right)\right)' = f'\left(g(x)\right)g'(x)$ において，$f(x)=\frac{1}{x}$ とする．このとき，$\left(f\left(g(x)\right)\right)'$ を $g(x)$ および $g'(x)$ を用いて表せ．

$f(x)=\frac{1}{x}$ のとき $f'(x)=-\frac{1}{x^2}$ （a) より）

$$\begin{aligned}\therefore\ (f(g(x)))' &= f'(g(x))\,g'(x)\\ &= -\frac{1}{g(x)^2}\cdot g'(x)\\ &= \frac{-g'(x)}{g(x)^2}\end{aligned}$$

c) $\left(\frac{1}{g(x)}\right)'$ に関する微分公式を再度導け．

$f(x)=\frac{1}{x}$ のとき $f(g(x))=\frac{1}{g(x)}$ だから

$$\left(\frac{1}{g(x)}\right)' = (f(g(x)))' = \frac{-g'(x)}{g(x)^2}$$

$$\therefore\ \left(\frac{1}{g(x)}\right)' = \frac{-g'(x)}{g(x)^2}$$

【裏に続く】

5 関数 $f(x)$ とその逆関数 $f^{-1}(x)$ は $f\left(f^{-1}(x)\right)=x$ をみたす．この両辺を微分し，それを逆関数の導関数 $\left(f^{-1}(x)\right)'$ について解くことにより，$\left(f^{-1}(x)\right)'$ の微分公式を求めよ．

$$\left(f(f^{-1}(x))\right)' = (x)'$$
$$f'(f^{-1}(x))\,(f^{-1}(x))' = 1$$
$$\therefore\ (f^{-1}(x))' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

6 $f(x)=x^n$ とすると，関数 $\sqrt[n]{x}$ は，関数 $f(x)$ の逆関数である．すなわち $f^{-1}(x)=\sqrt[n]{x}$ である．問題 5 で得られた逆関数の微分公式を用いて $\left(\sqrt[n]{x}\right)'=\dfrac{1}{n\left(\sqrt[n]{x}\right)^{n-1}}$ であることを示せ．

$f(x)=x^n$ のとき $f'(x)=nx^{n-1}$

$$(\sqrt[n]{x})' = (f^{-1}(x))' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{n(\sqrt[n]{x})^{n-1}}$$

7 問題 6 の結果を分数指数を用いて表すことにより $\left(x^{\frac{1}{n}}\right)'$ の微分公式を求めよ．

$$\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$$
$$\frac{1}{n(\sqrt[n]{x})^{n-1}} = \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{x^{\frac{n-1}{n}}} = \frac{1}{n}x^{-\frac{n-1}{n}} = \frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}$$
$$\therefore\ (x^{\frac{1}{n}})' = \frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}$$

8 $x^{\frac{m}{n}}=(x^m)^{\frac{1}{n}}$ であることを用いて $\left(x^{\frac{m}{n}}\right)'$ を求めよ．

$f(x)=x^{\frac{1}{n}}$，$g(x)=x^m$ とおくと $x^{\frac{m}{n}}=f(g(x))$

$$(x^{\frac{m}{n}})' = (f(g(x)))' = f'(g(x))\,g'(x) = \frac{1}{n}(x^m)^{\frac{1}{n}-1}\cdot mx^{m-1}$$
$$= \frac{m}{n}x^{\frac{m}{n}-m}\cdot x^{m-1} = \frac{m}{n}x^{\frac{m}{n}-1}$$

9 次の関数を変数 x で微分せよ．

a) $f(x)=\dfrac{1}{x\sqrt{x}} = x^{-\frac{3}{2}}$

$$f'(x) = -\frac{3}{2}x^{-\frac{5}{2}}$$
$$= -\frac{3}{2}\frac{1}{x^2\sqrt{x}}$$

b) $f(x)=\left(x^2-\dfrac{1}{x}\right)^3$

$$f'(x) = 3\left(x^2-\frac{1}{x}\right)^2\cdot\left(x^2-\frac{1}{x}\right)'$$
$$= 3\left(x^2-\frac{1}{x}\right)^2\cdot\left(2x+\frac{1}{x^2}\right)$$

c) $f(x)=\sqrt{16-x^2} = (16-x^2)^{\frac{1}{2}}$

$$f'(x) = \frac{1}{2}(16-x^2)^{-\frac{1}{2}}(16-x^2)'$$
$$= -x(16-x^2)^{-\frac{1}{2}}$$
$$= \frac{-x}{\sqrt{16-x^2}}$$

d) $f(x)=\sqrt[3]{x^2-x+1} = (x^2-x+1)^{\frac{1}{3}}$

$$f'(x) = \frac{1}{3}(x^2-x+1)^{-\frac{2}{3}}\cdot(x^2-x+1)'$$
$$= \frac{2x-1}{3\sqrt[3]{(x^2-x+1)^2}}$$

e) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$

$$f'(x) = -\frac{1}{2}(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}\cdot(1-x^2)'$$
$$= \frac{x}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$$

f) $f(x)=x^3\sqrt{2x+1}$

$$f'(x) = (x^3)'\sqrt{2x+1} + x^3(\sqrt{2x+1})'$$
$$= 3x^2\sqrt{2x+1} + x^3\frac{(2x+1)'}{2\sqrt{2x+1}}$$
$$= \frac{3x^2(2x+1)+x^3}{\sqrt{2x+1}}$$
$$= \frac{x^2(7x+3)}{\sqrt{2x+1}}$$

2014 年 12 月 2 日