

1 独立な確率変数 X と Y について, $E(XY) = E(X)E(Y)$ が成り立つ. この性質と, 分散と期待値の関係式 $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$ を用い, 独立な確率変数 X と Y について, $V(X+Y) = V(X) + V(Y)$ が成り立つことを証明せよ.

$$\begin{aligned} V(X+Y) &= E((X+Y)^2) - E(X+Y)^2 \\ &= E(X^2 + 2XY + Y^2) - (E(X) + E(Y))^2 \\ &= E(X^2) + 2E(XY) + E(Y^2) - E(X)^2 - 2E(X)E(Y) - E(Y)^2 \\ &= E(X^2) - E(X)^2 + E(Y^2) - E(Y)^2 \quad (E(XY) = E(X)E(Y) \text{ より}) \\ &= V(X) + V(Y) \end{aligned}$$

2 確率変数 X の期待値が -3 で分散が 5 , 確率変数 Y の期待値が 2 で分散が 4 であり, X と Y が互いに独立であるとする. このとき, 確率変数 $Z = X + Y$ の期待値, 分散と標準偏差を求めよ.

$$\begin{aligned} E(X) &= -3 & E(Y) &= 2 \\ V(X) &= 5 & V(Y) &= 4 \end{aligned}$$

$$E(Z) = E(X+Y) = E(X) + E(Y) = -1$$

$$V(Z) = V(X+Y) = V(X) + V(Y) = 9 \quad (X, Y \text{ は独立だから})$$

$$\sigma(Z) = \sqrt{V(Z)} = 3$$

- 3) a) サイコロを1回投げるとき、1の目が出ると $X = 1$ 、それ以外の目が出ると $X = 0$ とする。確率変数 X の期待値と分散を求めよ。

X	0	1
P	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{6}$

$$E(X) = 0 \times \frac{5}{6} + 1 \times \frac{1}{6} = \frac{1}{6}$$

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{1}{6} - \left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{5}{36} \quad (X^2 = X \text{ であるから})$$

- b) 1個のサイコロを続けて5回投げるとき、1の目が出る回数を Y とする。このとき、第 k 回目に1の目が出ると1、それ以外の目が出ると0となる確率変数を X_k とすると、各 X_k は a) と同じ分布にしたがい、 X_1, \dots, X_5 は互いに独立であって、 $Y = X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5$ と表せる。これを用いて、確率変数 Y の期待値、分散と標準偏差を求めよ。

$$\begin{aligned} E(Y) &= E(X_1 + \dots + X_5) = E(X_1) + \dots + E(X_5) \\ &= 5 \times \frac{1}{6} = \frac{5}{6} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V(Y) &= V(X_1 + \dots + X_5) = V(X_1) + \dots + V(X_5) \\ &= 5 \times \frac{5}{36} = \frac{25}{36} \end{aligned}$$

$$\sigma(Y) = \sqrt{V(Y)} = \frac{5}{6}$$