

1) 確率変数 X のとる値が x_1, x_2, \dots, x_n であり, 値 x_k をとる確率が p_k であるとする. このとき, 期待値 $E(X)$ は $E(X) = \sum_{k=1}^n x_k p_k$ で定義されるのであった.

a) a, b を定数とすると, $aX + b$ は $ax_1 + b, ax_2 + b, \dots, ax_n + b$ という値をとる確率変数である. $aX + b$ の期待値 $E(aX + b)$ を求めよ.

$$\begin{aligned} E(aX + b) &= \sum_{k=1}^n (ax_k + b) p_k \\ &= \sum_{k=1}^n (ax_k p_k + b p_k) \\ &= a \sum_{k=1}^n x_k p_k + b \sum_{k=1}^n p_k \quad (\Sigma \text{ の性質}) \\ &= a E(X) + b \quad \left(\sum_{k=1}^n p_k = 1 \text{ であるから} \right) \end{aligned}$$

b) 確率変数 X の分散 $V(X)$ について $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$ が成り立つことと, a) の結果を用い, $V(aX + b)$ を求めよ.

$$\begin{aligned} V(aX + b) &= E((aX + b)^2) - E(aX + b)^2 \\ &= E(a^2 X^2 + 2abX + b^2) - (aE(X) + b)^2 \\ &= a^2 E(X^2) + 2abE(X) + b^2 - a^2 E(X)^2 - 2abE(X) - b^2 \\ &= a^2 (E(X^2) - E(X)^2) \\ &= a^2 V(X) \end{aligned}$$

2 1枚の硬貨を続けて5回投げるとき、表の出る回数を Y とする。

a) 確率変数 Y の確率分布を求めよ。

Y	0	1	2	3	4	5	計
P	$\frac{1}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{10}{32}$	$\frac{10}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{1}{32}$	1

b) 確率変数 Y の期待値と標準偏差を求めよ。

$$\begin{aligned} E(Y) &= 0 \times \frac{1}{32} + 1 \times \frac{5}{32} + 2 \times \frac{10}{32} + 3 \times \frac{10}{32} + 4 \times \frac{5}{32} + 5 \times \frac{1}{32} \\ &= \frac{1}{32} (5 + 20 + 30 + 20 + 5) = \frac{80}{32} = \frac{5}{2} \end{aligned}$$

$$V(Y) = E(Y^2) - E(Y)^2$$

$$E(Y^2) = \frac{1}{32} (5 + 40 + 90 + 80 + 25) = \frac{240}{32} = \frac{15}{2}$$

$$V(Y) = \frac{15}{2} - \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{30 - 25}{4} = \frac{5}{4}$$

$$\sigma(Y) = \sqrt{V(Y)} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$