

1 個のサイコロを投げるとき、出た目の数を X とする。

a) 確率変数 X の確率分布を求めよ。

X	1	2	3	4	5	6	計
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

b) 確率変数 X の期待値 $E(X)$ と分散 $V(X)$ を定義にしたがって求めよ。

$$\begin{aligned} E(X) &= 1 \times \frac{1}{6} + 2 \times \frac{1}{6} + 3 \times \frac{1}{6} + 4 \times \frac{1}{6} + 5 \times \frac{1}{6} + 6 \times \frac{1}{6} \\ &= \frac{21}{6} = \frac{7}{2} = 3.5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V(X) &= (1 - \frac{7}{2})^2 \times \frac{1}{6} + (2 - \frac{7}{2})^2 \times \frac{1}{6} + (3 - \frac{7}{2})^2 \times \frac{1}{6} \\ &\quad + (4 - \frac{7}{2})^2 \times \frac{1}{6} + (5 - \frac{7}{2})^2 \times \frac{1}{6} + (6 - \frac{7}{2})^2 \times \frac{1}{6} \\ &= \frac{35}{12} \end{aligned}$$

c) 確率変数 X^2 の確率分布を求めよ。

X^2	1	4	9	16	25	36	計
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

d) 確率変数 X^2 の期待値 $E(X^2)$ および $E(X^2) - E(X)^2$ を計算し、 $E(X^2) - E(X)^2 = V(X)$ であることを確かめよ。

$$\begin{aligned} E(X^2) &= 1 \times \frac{1}{6} + 4 \times \frac{1}{6} + 9 \times \frac{1}{6} + 16 \times \frac{1}{6} + 25 \times \frac{1}{6} + 36 \times \frac{1}{6} \\ &= \frac{91}{6} \end{aligned}$$

$$E(X^2) - E(X)^2 = \frac{91}{6} - \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{182 - 147}{12} = \frac{35}{12}$$

確かに $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$ が成り立っている。

2 2013年の年末ジャンボ宝くじは総計 600,000,000 枚 (6 億枚) 発行され, 当選金額と当選本数は以下の通りであった. この宝くじの期待値を求めよ. (必要なら電卓等を用いてよい.)

等級	当選金額	当選本数
1等	500,000,000円	60本
1等の前後賞	100,000,000円	120本
1等の組違い賞	100,000円	5,940本
2等	1,000,000円	1,800本
3等	3,000円	6,000,000本
4等	300円	60,000,000本
大晦日特別賞	50,000円	180,000本

定義に従って計算すれば

$$E(X) = 148.99$$