復習問題　略解

$\boxed{1}$ a) $\dfrac{f(2)-f(1)}{2-1}=\dfrac{2}{3}$　b) $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=2$　c) $y=2x-3$　d) 別紙参照

$\boxed{2}$ a) $\dfrac{f(2)-f(1)}{2-1}=-\sqrt{3}+1$　b) $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=-1$　c) $y=-x$　d) 別紙参照

$\boxed{3}$ a) 別紙グラフより，$0<x<1$，$2<x$　b) 別紙グラフより，$x \leqq 1$

$\boxed{4}$ a) $(g\circ f)(x)=1+a-ax$，$(f\circ g)(x)=-\dfrac{x}{a}$.

b) $1+a-ax=-\dfrac{x}{a}$ がすべての x になついて成り立たなければ行けないので，$a=-1$.

$\boxed{5}$ a) 定義域 $x\neq -2$, 値域 $y\neq 2$；逆関数 $f^{-1}(x)=-\dfrac{2x+1}{x-2}$，逆関数の定義域 $x\neq 2$, 値域 $y\neq -2$.

b) 定義域 $x\leqq 2$, 値域 $y\leqq 0$；逆関数 $f^{-1}(x)=2-x^2$，逆関数の定義域 $x\leqq 0$, 値域 $y\leqq 2$.

$\boxed{6}$ 次の関数を変数 x で微分せよ．

a) $f'(x)=3(4x+5)(2x^2+5x-6)^2$

b) $f'(x)=(x-1)^4+4x(x-1)^3$

c) $f'(x)=\dfrac{-4x}{(x^2-3)^3}$

d) $f'(x)=\dfrac{-2(3x^2-15x-1)}{(3x^2+1)^2}$

e) $f'(x)=\dfrac{3x^2-x-4}{2x\sqrt{x}}$

f) $f'(x)=\dfrac{1-3x}{2\sqrt{2-x}}$

g) $f'(x)=-\dfrac{1}{3}\sqrt[3]{\dfrac{1}{(x+4)^4}}$

h) $$f'(x)=-\frac{1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}}{(x+\sqrt{x^2-1})^2}=-\frac{1}{\sqrt{x^2-1}\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)}$$

i) $f'(x)=(1-2x)e^{-2x}$

j) $f'(x)=\dfrac{x-1}{x}e^{\frac{1}{x}}$

k) $f'(x)=\dfrac{2}{(x-1)(x+1)}$

l) $f'(x)=\dfrac{\log x-2}{(\log x-1)^2}$

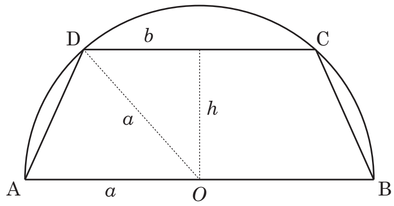
$\boxed{7}$ 別紙グラフ参照

$\boxed{8}$ a) 最大値 $\sqrt{2}$（$x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ のとき），最小値 -1（$x=-1$ のとき）.

b) 最大値 $e^{-2}=0.135335\ldots$（$x=1$ のとき），最小値 -1（$x=0$ のとき）.

【裏につづく】

9 台形の高さを h とし，上底の長さ（辺 CD の長さ）を $2b$ とおくと，図のように $a^2 = b^2 + h^2$ が成り立つ．



したがって，$b = \sqrt{a^2 - h^2}$ となる．このとき，$S = \dfrac{2a+2b}{2}h$ であるから，$S = h(a + \sqrt{a^2 - h^2})$.

$$\frac{dS}{dh} = \frac{a\sqrt{a^2-h^2} + a^2 - 2h^2}{\sqrt{a^2-h^2}}$$

$\dfrac{dS}{dh} = 0$ となるのは $a\sqrt{a^2-h^2} + a^2 - 2h^2 = 0$ のときであるが，$a\sqrt{a^2-h^2} = -a^2 + 2h^2$ の両辺を２乗して整理することにより，$4h^4 = 3a^2h^2$ を得る．$h > 0$ であることに注意して $\dfrac{dS}{dh} = 0$ となるのは $h = \dfrac{\sqrt{3}}{2}a$ のとき．$0 < h < a$ の範囲で S の増減表を書けば（省略），$h = \dfrac{\sqrt{3}}{2}a$ のとき S が最大になることがわかり，S の最大値は $\dfrac{3\sqrt{3}}{4}a^2$.

10 a) $3x - 1 = t$ とおくと，$x = \dfrac{t}{3} + \dfrac{1}{3}$．したがって，$\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{1}{3}$ となる．これより，$\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{3x-1}}\,dx = \int \frac{t+1}{3\sqrt{t}} \cdot \frac{1}{3}\,dt = \frac{1}{9}\int \left(t^{\frac{1}{2}} + t^{-\frac{1}{2}}\right)dt = \frac{2}{27}t^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{9}t^{\frac{1}{2}} + C = \frac{2}{27}(3x-1)^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{9}(3x-1)^{\frac{1}{2}} + C$

b) $\sqrt{3x-1} = t$ とおくと，$x = \dfrac{t^2}{3} + \dfrac{1}{3}$．したがって，$\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{2t}{3}$ となる．これより，$\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{3x-1}}\,dx = \int \frac{t^2+1}{3t} \cdot \frac{2t}{3}\,dt = \frac{2}{9}\int (t^2+1)\,dt = \frac{2}{27}t^3 + \frac{2}{9}t + C = \frac{2}{27}(3x-1)^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{9}(3x-1)^{\frac{1}{2}} + C$

11 a) $\displaystyle\int x(3x+2)\,dx = \int (3x^2+2x)\,dx = x^3 + x^2 + C$

b) $t = \log x$ とおくと，$\dfrac{dt}{dx} = \dfrac{1}{x}$．これより形式的に　$dt = \dfrac{1}{x}\,dx$.

$$\int \frac{1}{x\log x}\,dx = \int \frac{1}{\log x} \cdot \left(\frac{1}{x}\,dx\right) = \int \frac{1}{t}\,dt = \log t + C = \log(\log x) + C$$

c) $u = x + 1, v' = e^x$ とおいて，部分積分 $\int uv' = uv - \int u'v$ を用いる．このとき $v = e^x$ であることに注意.

$$\int (x+1)e^x\,dx = (x+1)e^x - \int 1 \cdot e^x\,dx = (x+1)e^x - e^x + C = xe^x + C$$

d) 少しわかりにくいかもしれないが，$u = \log(x+1), v' = 1$ とおいて，部分積分を用いる．このとき $v = x$ となることに注意.

$$\begin{aligned}\int \log(x+1)\,dx &= x\log(x+1) - \int x \cdot \frac{1}{x+1}\,dx \\ &= x\log(x+1) - \int \left(1 - \frac{1}{x+1}\,dx\right)dx \\ &= x\log(x+1) - (x - \log x) + C = (x+1)\log(x+1) - x + C\end{aligned}$$