学籍番号：＿＿＿＿＿＿＿＿　氏名：＿＿＿＿＿＿＿＿

1 a) $f(x)=e^x$ とすると，自然対数関数 $\log x$ はその逆関数である，すなわち $f^{-1}(x)=\log x$ である．逆関数の微分公式と $f'(x)=e^x$ であることを用い，$\log x$ の導関数を求めよ．

$$(f^{-1}(x))' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$ に $f(x)=e^x$, $f'(x)=e^x$, $f^{-1}(x)=\log x$

を代入して $$(\log x)' = \frac{1}{e^{\log x}} = \frac{1}{x}.$$

b) $g(x)=\log x$ とおいたとき，a) を用いて $g'(1)$ の値を求めよ．

$g'(x)=\frac{1}{x}$. より $g'(1)=1$

c) b) を用い，極限 $\lim_{h\to 0}\frac{\log(1+h)}{h}$ の値を求めよ．

$$g'(1)=\lim_{h\to 0}\frac{g(1+h)-g(1)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\log(1+h)-\overbrace{\log 1}^{=0}}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{\log(1+h)}{h}.$$

b) より $g'(1)=1$ だから $\lim_{h\to 0}\frac{\log(1+h)}{h}=1$

d) $\frac{\log(1+h)}{h}=\log(1+h)^{\frac{1}{h}}$ であることと，c) を用いて $\lim_{h\to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}}$ の値を求めよ．

$$(1+h)^{\frac{1}{h}} = e^{\log(1+h)^{\frac{1}{h}}} = e^{\frac{\log(1+h)}{h}}$$
$$\lim_{h\to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}} = \lim_{h\to 0} e^{\frac{\log(1+h)}{h}} = e^1 = e.$$

e) d) において $h=\frac{1}{n}$ とおくことにより，極限 $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ の値を求めよ．

$h=\frac{1}{n}$ とすると $n\to\infty$ としたとき $h\to 0$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{h\to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}} = e.$$

2 a) $\lim_{h\to 0}\frac{\log(1+h)}{h}=1$ は既知であるとして $\lim_{h\to 0}\frac{\log\left(1+\frac{h}{x}\right)}{h}$ を求めよ．

$\lim_{h\to 0}\frac{\log(1+\frac{h}{x})}{h}$ で $k=\frac{h}{x}$ とおくと $h=xk$

また $h\to 0 \Leftrightarrow k\to 0$.

よって $$\lim_{h\to 0}\frac{\log(1+\frac{h}{x})}{h} = \lim_{k\to 0}\frac{\log(1+k)}{xk} = \frac{1}{x}\lim_{k\to 0}\frac{\log(1+k)}{k} = \frac{1}{x}$$

b) $\log x$ の導関数をを定義を直接用いて求めよ．

$$(\log x)' = \lim_{h\to 0}\frac{\log(x+h)-\log x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\log\left(\frac{x+h}{x}\right)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{\log(1+\frac{h}{x})}{h} = \frac{1}{x}$$ （a) より）

3 $f(x)$ に対し，$(\log f(x))'$ を $f(x)$ と $f'(x)$ を用いて表せ．

$$(\log f(x))' = \frac{1}{f(x)}\times f'(x)$$
$$= \frac{f'(x)}{f(x)}$$

【裏に続く】

4 次の関数の導関数を求めよ．

a) $f(x) = e^{-x^2}$

$$f'(x) = -2xe^{-x^2}$$

b) $f(x) = x^2 e^{-2x}$

$$f'(x) = 2xe^{-2x} + x^2 e^{-2x} \times (-2)$$
$$= 2x(1-x)e^{-2x}$$

c) $f(x) = \log(x^2+1)$

$$f'(x) = \frac{(x^2+1)'}{x^2+1} = \frac{2x}{x^2+1}$$

d) $f(x) = e^x \log x$

$$f'(x) = e^x \log x + e^x \cdot \frac{1}{x}$$
$$= e^x \left(\log x + \frac{1}{x}\right)$$

e) $f(x) = x \log x$

$$f'(x) = \log x + x \cdot \frac{1}{x}$$
$$= \log x + 1$$

f) $f(x) = x^2 (\log x)^3$

$$f'(x) = 2x(\log x)^3 + x^2 \cdot 3(\log x)^2 \cdot \frac{1}{x}$$
$$= 2x(\log x)^3 + 3x(\log x)^2$$
$$= x(\log x)^2(2x \log x + 3)$$

g) $f(x) = \log(1 + \sqrt{x^2+1})$

$$f'(x) = \frac{(1+\sqrt{x^2+1})'}{1+\sqrt{x^2+1}} = \frac{\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{1+\sqrt{x^2+1}} = \frac{2x}{\sqrt{1+x^2} + 1 + x^2}$$

h) $f(x) = \dfrac{e^x}{1-e^x}$

$$f'(x) = \frac{e^x(1-e^x) - e^x(-e^x)}{(1-e^x)^2} = \frac{e^x}{(1-e^x)^2}$$

i) $f(x) = \dfrac{x}{(\log x - 1)}$

$$f'(x) = \frac{\log x - 1 - x\left(\frac{1}{x}\right)}{(\log x - 1)^2} = \frac{\log x - 2}{(\log x - 1)^2}$$

2014 年 11 月 28 日