1　２つの関数 $u = f(x)$ と $v = g(x)$ の積として表される関数 $y = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ の導関数を求めたい．
いま，x の増分を $\Delta x = h$ とすると，u の増分 Δu と v の増分 Δv はそれぞれ，

$$\Delta u = f(x+h) - f(x), \qquad \Delta v = g(x+h) - g(x)$$

と表せる．これより，

$$f(x+h) = f(x) + \Delta u, \qquad g(x+h) = g(x) + \Delta v$$

と書ける．したがって，y の増分は

$$\Delta y = \frac{f(x+h)}{g(x+h)} - \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\boxed{}}{\boxed{}} - \frac{f(x)}{g(x)}$$

$$= \frac{\boxed{}}{g(x)(g(x)+\Delta v)}$$

となる．この両辺を Δx で割って，

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\dfrac{\Delta u}{\Delta x}\cdot\boxed{} - \boxed{}}{g(x)(g(x)+\Delta v)}$$

となる．このとき，$\displaystyle\lim_{h\to 0}\Delta v = 0$ だから，

$$\lim_{h\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)', \quad \lim_{h\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x} = f'(x), \quad \lim_{h\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x} = g'(x)$$

と書き直して，商の微分公式

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{\boxed{}}{\boxed{}}$$

を得る．

学籍番号 : ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿　氏名 : ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

【裏に続く】

$\boxed{2}$ 次の関数を微分せよ.

a) $f(x) = \dfrac{3x-1}{2x^2-1}$

$f'(x) =$

b) $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$

$f'(x) =$

$\boxed{3}$ $x \neq 1$ のとき，$1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \dfrac{x^{n+1}-1}{x-1}$ である．この両辺を微分することによって，和 $1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1}$ を求めよ.

2014 年 11 月 7 日