1 次の各々の関数の導関数を定義にしたがって求めよ．

a) $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$

b) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

2 n が自然数であるとき，二項定理により

$$(x+h)^n = x^n + {}_nC_1 x^{n-1}h + {}_nC_2 x^{n-2}h^2 + \cdots + {}_nC_{n-1} x h^{n-1} + h^n$$

である．これを用い，関数 $f(x) = x^n$ の導関数を定義にしたがって求めよ．

3 2 つの関数 $u = f(x)$ と $v = g(x)$ の積として表される関数 $y = f(x)g(x)$ の導関数を求めたい．

いま，x の増分を $\Delta x = h$ とすると，u の増分 Δu と v の増分 Δv はそれぞれ，$\Delta u = f(x+h) - f(x)$，$\Delta v = g(x+h) - g(x)$ と表せる．したがって，$f(x+h) = f(x) + \Delta u$，$g(x+h) = g(x) + \Delta v$ と書けるので，y の増分は

$$\Delta y = f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x) = \bigl(f(x) + \Delta u\bigr)\bigl(g(x) + \Delta v\bigr) - f(x)g(x)$$
$$= \boxed{}$$

となる．この両辺を割って，$\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \boxed{}$ となる．このとき，

$$\lim_{h\to 0} \frac{\Delta u \Delta v}{\Delta x} = \lim_{h\to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot \lim_{h\to 0} \Delta v = f'(x) \cdot 0 = 0$$

である．そこで，$\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \bigl(f(x)g(x)\bigr)'$，$\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = f'(x)$，$\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = g'(x)$ と書き直し，積の微分公式

$$\bigl(f(x)g(x)\bigr)' = \boxed{}$$

を得る．

4 積の微分公式を用いて次の関数を変数 x で微分せよ．

a) $f(x) = (x^2+3)(x^2-2x+2)$

$f'(x) =$

b) $f(x) = (x^2 - x + 1)(x+1)$

$f'(x) =$

5 $f(x)g(x)h(x) = \bigl(f(x)g(x)\bigr)h(x)$ であることと積の微分公式を用いて 3 つの関数の積の導関数 $\bigl(f(x)g(x)h(x)\bigr)'$ を求めよ．

6 関数 $g(x)$ に対し，関数 $f(x)=\dfrac{1}{g(x)}$ の導関数を求めたい.

そこで，$f(x)=\dfrac{1}{g(x)}$ の分母を払った式 $f(x)g(x)=1$ の両辺を微分すると，積の微分公式により

$$\boxed{}=0$$

を得る．これを $f'(x)$ について解き，さらに $f(x)$ を $\dfrac{1}{g(x)}$ で置き換えて整理することにより，次の公式を得る.

$$f'(x)=\left(\frac{1}{g(x)}\right)'=\boxed{}$$

7 問題６で得た公式において $g(x)=x^n$ とおくことにより，$\left(\dfrac{1}{x^n}\right)'$ を求め，なるべく簡単にせよ.

8 問題７の結果を負の数の指数を用いて表すことにより $\left(x^{-n}\right)'$ を負の指数を用いた形で表せ.

9 $\dfrac{f(x)}{g(x)}=f(x)\times\dfrac{1}{g(x)}$ である．この右辺を積の微分公式を用いて微分し，問題６の微分公式を用いることにより，商の微分公式 $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)'$ を求めよ.

10 次の関数を変数 x で微分せよ.

a) $f(x)=\dfrac{x-2}{x+3}$

$f'(x)=$

b) $f(x)=\dfrac{x-5}{x^2+5}$

$f'(x)=$

c) $f(x)=\dfrac{x}{x^2-x+1}$

$f'(x)=$

d) $f(x)=\dfrac{x^4+3x-2}{x^2}$

$f'(x)=$