1 $f(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - x^2$ とする.

a) $f(-3), f(-2), f(-1), f(0), f(1), f(2), f(3)$ をそれぞれ求めよ.

$\frac{9}{4}$　$-\frac{8}{3}$　$-\frac{13}{12}$　$0$　$-\frac{5}{12}$　$\frac{8}{3}$　$\frac{81}{4}$

b) $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ と 2 次導関数 $f''(x)$ を求めよ.

$f'(x) = x^3 + x^2 - 2x$

$f''(x) = 3x^2 + 2x - 2$

c) $f'(x) = 0$ となる $x$ と，$f'(x) > 0$ となる $x$ の範囲を求めよ.

$f'(x) = 0 \iff x^3 + x^2 - 2x = 0 \iff x(x-1)(x+2) = 0$

$\iff x = 0, 1, -2$

$f'(x) > 0 \iff x(x-1)(x+2) > 0$

$\iff -2 < x < 0,\ x > 1$

d) $f''(x) = 0$ となる $x$ と，$f''(x) > 0$ となる $x$ の範囲を求めよ.

$f''(x) = 3x^2 + 2x - 2 = 0,\quad x = \frac{-1 \pm \sqrt{7}}{3}$

$f''(x) > 0 \iff 3x^2 + 2x - 2 > 0 \iff x < \frac{-1-\sqrt{7}}{3},\ x > \frac{-1+\sqrt{7}}{3}$

e) $f(x)$ の増減表を完成させよ.（増減だけでなくグラフの凹凸も調べること.）

| $x$ | $\cdots$ | $-2$ | $\cdots$ | $\frac{-1-\sqrt{7}}{3}$ | $\cdots$ | $0$ | $\cdots$ | $\frac{-1+\sqrt{7}}{3}$ | $\cdots$ | $1$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ | $+$ | $+$ | $0$ | $-$ | $-$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f''(x)$ | $+$ | $+$ | $+$ | $0$ | $-$ | $-$ | $-$ | $0$ | $+$ | $+$ | $+$ |
| $f(x)$ | ↘ | | ↗ | | ↗ | $0$ | ↘ | | ↘ | $-\frac{5}{12}$ | ↗ |
| | | 極小 | | 変曲点 | | 極大 | | 変曲点 | | 極小 | |

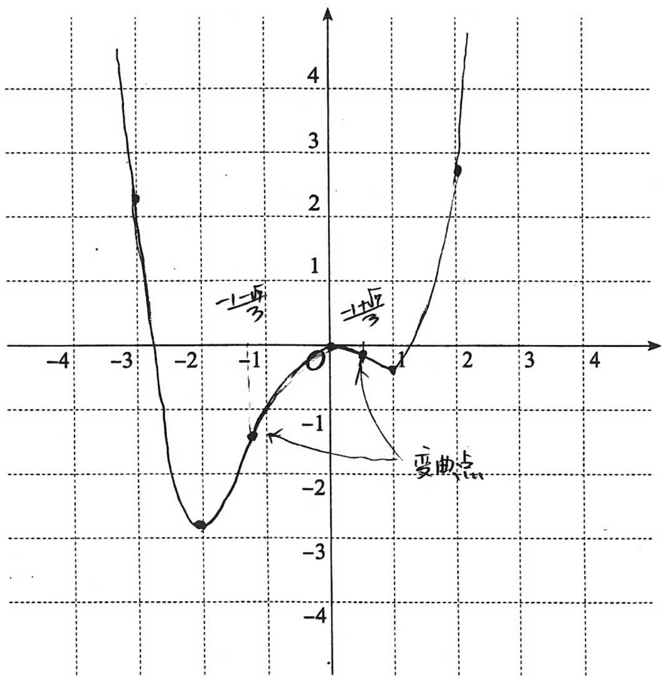
f) $f(x)$ が極大・極小となる $x$ の値を求めよ．また，$f(x)$ の極大値および極小値を小数で表せ．ただし，答えは小数第 3 位を四捨五入して小数第 2 位まで求めること.

極大：$x=0$　極大値　$0$

極小：$x=-2$　極小値　$-\frac{8}{3} \fallingdotseq -2.67$

〃　$x=1$　〃　$-\frac{5}{12} \fallingdotseq -0.42$

g) $y = f(x)$ のグラフを，ここまでの結果を反映させて，なるべく丁寧に描け.



2 $f(x) = 4xe^{-x^2/2}$ とする.

a) $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ と 2 次導関数 $f''(x)$ を求めよ.

$$f'(x) = 4e^{-\frac{x^2}{2}} + 4x\, e^{-\frac{x^2}{2}}(-x) = 4(1-x^2)e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$f''(x) = 4(-2x)e^{-\frac{x^2}{2}} + 4(1-x^2)e^{-\frac{x^2}{2}}(-x)$$

$$= 4x(x^2-3)e^{-\frac{x^2}{2}}$$

b) $f'(x) = 0$ となる $x$ と, $f'(x) > 0$ となる $x$ の範囲を求めよ.

$$f'(x) = 4(1-x^2)\underbrace{e^{-\frac{x^2}{2}}}_{>0} = 0 \iff (1-x^2) = 0 \iff x = \pm 1$$

$$f'(x) > 0 \iff 1-x^2 > 0 \iff -1 < x < 1$$

c) $f''(x) = 0$ となる $x$ と, $f''(x) > 0$ となる $x$ の範囲を求めよ.

$$f''(x) = 0 \iff x(x^2-3) = 0 \iff x = 0,\ \pm\sqrt{3}$$

$$f''(x) > 0 \iff x(x^2-3) > 0 \iff x(x^2-3) > 0$$

$$\iff -\sqrt{3} < x < 0,\ x > \sqrt{3}$$

d) $f(x)$ の増減表を完成させよ.（増減だけでなくグラフの凹凸も調べること.）

| $x$ | $\cdots$ | $-\sqrt{3}$ | $\cdots$ | $-1$ | $\cdots$ | $0$ | $\cdots$ | $1$ | $\cdots$ | $\sqrt{3}$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | $-$ | $-$ | $0$ | $+$ | $+$ | $+$ | $0$ | $-$ | $-$ | $-$ |
| $f''(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ | $+$ | $+$ | $0$ | $-$ | $-$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | ↘ | | ↘ | $-4e^{-\frac{1}{2}}$ | ↗ | | ↗ | $4e^{-\frac{1}{2}}$ | ↘ | | ↘ |

変曲点　極小　変曲点　極大　変曲点

e) $f(x)$ が極大・極小となる点, および変曲点を求めよ.

極大 : $x = 1$

極小 : $x = -1$

変曲点 : $x = 0,\ \pm\sqrt{3}$

f) $e^{-1/2} \fallingdotseq 0.607$, $e^{-1} \fallingdotseq 0.368$, $e^{-3/2} \fallingdotseq 0.223$, $e^{-2} \fallingdotseq 0.135$ であるとして, $f(\pm 1)$, $f(\pm\sqrt{3})$, $f(\pm 2)$ の値を概算せよ.

$$f(\pm 1) \fallingdotseq \pm 4 \times 0.607 = \pm 2.428$$

$$f(\pm\sqrt{3}) \fallingdotseq \pm 4\sqrt{3} \times 0.223 = \pm 1.545$$

$$f(\pm 2) \fallingdotseq \pm 8 \times 0.135 = \pm 1.08$$

g) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$ であることが知られている. これと, ここまでの結果を用いて, $f(x)$ のグラフを描け.