$\boxed{1}$ $f(x) = x\sqrt{4-x^2}$ とする.

a) 関数 $f(x)$ の定義域を求めよ.

根号内 $\geqq 0$　　$4-x^2 \geqq 0$

$\Leftrightarrow -2 \leqq x \leqq 2$

b) 導関数 $f'(x)$ を求めよ.

$$f'(x) = \sqrt{4-x^2} + x\frac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}} = \frac{2(2-x^2)}{\sqrt{4-x^2}}$$

c) $f'(x) = 0$ となる x と, $f'(x) > 0$ となる範囲を求めよ.

$f'(x)$ は $-2<x<2$ で定義され，このとき $\sqrt{4-x^2} > 0$

したがって　$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2-x^2=0 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{2}$

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 2-x^2>0 \Leftrightarrow -\sqrt{2}<x<\sqrt{2}$

d) $f(x)$ が定義域内での増減表を書け.

x	-2	$\cdots$	$-\sqrt{2}$	$\cdots$	$\sqrt{2}$	$\cdots$	2
$f'(x)$	$\times$	$-$	0	$+$	0	$-$	$\times$
$f(x)$	0	$\searrow$	-2	$\nearrow$	2	$\searrow$	0

e) $f(x)$ の定義域内での最大値，最小値を求めよ.

最大値　2　$(x=\sqrt{2})$

最小値　-2　$(x=-\sqrt{2})$

$\boxed{2}$ $f(x) = xe^{-x}$ とする.

a) 導関数 $f'(x)$ を求めよ.

$$f'(x) = e^{-x} + xe^{-x} \times (-x)'$$
$$= (1-x)e^{-x}$$

b) 微分係数 $f'(0)$ を求めよ.

$f'(0) = 1 \cdot e^0 = 1$

c) 曲線 $y = xe^{-x}$ の原点 $(0,0)$ における接線の方程式を求めよ.

$y - 0 = 1\cdot(x-0)$

$\therefore y = x$

d) 関数 $f(x) = xe^{-x}$ の増減を調べ，増減表を完成させよ.

$f'(x)=0 \Leftrightarrow x=1$

$f'(x)>0 \Leftrightarrow x<1$

x	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$

【裏に続く】

3 関数 $f(x)=\dfrac{4x}{x^2+x+4}$ の増減を調べよ（= 増減表を書け）.

$$f'(x)=\frac{4(x^2+x+4)-4x(2x+1)}{(x^2+x+4)^2}=\frac{-4x^2+16}{(x^2+x+4)^2}$$

x		-2		2	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	$-\frac{4}{3}$	↗	$\frac{4}{5}$	↘
		極小		極大	

4 直円柱の形をした缶詰の容器の容積が V で一定であるとき，その表面積 S を最小にしたい.

a) 底面の半径を r，高さ h とするとき，S と V をそれぞれ r と h で表せ.

$V=\pi r^2 h$ —①

$S=2\pi r^2+2\pi rh$ —②

b) S を V と r で表せ.

①より $h=\dfrac{V}{\pi r^2}$

②に代入して $S=2\pi r^2+2\pi r\dfrac{V}{\pi r^2}=2\pi r^2+\dfrac{2V}{r}$

c) S を r の関数とみて，S の増減を調べよ.

$S'=4\pi r-\dfrac{2V}{r^2}$

$S'=0 \Leftrightarrow 4\pi r^3-2V=0$

$\Leftrightarrow r=\sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}$

$(r>0)$

r	0		$\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$	
S'		$-$	0	$+$
S		↘		↗

d) S が最小になるときの r の値を求めよ．また，そのときの h の値も求めよ.

S は $r=\sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}$ のとき最小.

このとき $h=\dfrac{V}{\pi r^2}=\dfrac{V}{\pi\left(\frac{V}{2\pi}\right)^{\frac{2}{3}}}=\sqrt[3]{\dfrac{4V}{\pi}}$

5 次の関数の第 2 次導関数を求めよ.

a) $f(x)=\dfrac{x-1}{x+1}$

$f'(x)=\dfrac{2}{(x+1)^2}$

$f''(x)=\dfrac{-4}{(x+1)^3}$

b) $f(x)=\dfrac{x}{1+x^2}$

$f'(x)=\dfrac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$

$f''(x)=\dfrac{2x(x^2-3)}{(1+x^2)^3}$

c) $f(x)=xe^{-2x}$

$f'(x)=(1-2x)e^{-2x}$

$f''(x)=-4(1-x)e^{-2x}$