

応用問題

[1] 衛星放送のマーケットには V 社と W 社の 2 社がある. V 社の契約者は 1 期後には, 60% が契約を継続するが, 40% は W 社に変更する. また, W 社の契約者は 1 期後には, 80% が W 社との契約を継続するが, 20% は V 社に変更する. このとき次の問に答えよ.

- a) 第 n 期の V 社のシェアを v_n , W 社のシェアを w_n とする. このとき, ベクトル $\begin{pmatrix} v_{n+1} \\ w_{n+1} \end{pmatrix}$ はある行列 M とベクトル $\begin{pmatrix} v_n \\ w_n \end{pmatrix}$ を用いて $\begin{pmatrix} v_{n+1} \\ w_{n+1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} v_n \\ w_n \end{pmatrix}$ と表わされる. 行列 M をもつめよ.
- b) 上で求めた行列 M の固有値と固有ベクトルを求めよ.
- c) 行列 M を対角化せよ.
- d) M^n を求めよ.
- e) $\lim_{n \rightarrow \infty} M^n$ を求めよ. それを用いて, 第 1 期のマーケットシェアがどうであれ長期的にはシェアはある一定の割合に近づくことを示せ.

[2] p, q は $0 \leq p \leq 1, 0 \leq q \leq 1$ みたす実数とし, $M = \begin{pmatrix} 1-p & q \\ p & 1-q \end{pmatrix}$ とおく. M は固有値 1 を持つことを示せ. また, 固有値 1 に対する固有ベクトルを求めよ.

[3] あるインターネット・サービスのマーケットには A 社, B 社, C 社の 3 社が参入している. A 社の契約者は 1 期後には, 70% が契約を継続するが, 20% は B 社に変更し, 10% は C 社に変更する. また, B 社の契約者は 1 期後には, 80% が B 社との契約を継続するが, 10% は A 社に変更し, 10% は C 社に変更する. さらに, C 社の契約者は 1 期後には, 70% が C 社との契約を継続するが, 20% は A 社に変更し, 10% は B 社に変更する.

- a) 第 n 期後の A 社のシェアを a_n , B 社のシェアを b_n , C 社のシェアを c_n としたとき, ある行列 M を用いて

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$$

と表せる. 行列 M を求めよ.

- b) このような動向が長期間にわたって続くとすると, 各社のマーケットシェアは一定に近づく. シェアを表すベクトルは契約者の動向を表す行列 M の固有値 1 の固有ベクトルとなることを利用し, 各社のシェアを求めよ.

[4] あるレンタカーの会社には, 3 つの営業所, 東, 西, 南がある. 客はどの営業所で車を借りることもできるし, どの営業所に戻してもよい. 調査によると東営業所で借りた客の 8 割が東営業所に戻し, 1 割ずつが西と南営業所に戻すという. 西営業所で借りた客はそれぞれ, 3 割, 2 割, 5 割の割合で, 東, 西, 南営業所に戻す. また, 南営業所で借りた客はそれぞれ, 2 割, 6 割, 2 割の割合で, 東, 西, 南営業所に戻すという. このような状況が続くとした場合, レンタカーの配車を 3 つの営業所にどのような割合ですればよいか.

5] ある都市圏で、郊外人口を x 万人、都市人口を y 万人としたとき、10年後の郊外人口 x' 万人、都市人口 y' 万人の間に次の関係が成り立つとする。

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.4 \\ 0.4 & 1.3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

- $A = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.4 \\ 0.4 & 1.3 \end{pmatrix}$ とするとき、 A の固有値と固有ベクトルを求めよ。
- A を対角化せよ。
- A^n を求めよ。
- 上の関係式が長期間にわたって成り立つとすると、数十年後、郊外人口と都市人口との比率がほぼ一定に近づく。そのときの郊外人口と都市人口との比率はどれくらいになるか。また、そのときの都市圏全体の人口の増加率はおおよそどのくらいか。

6] On planet Xsldkfs, there are two primitive life forms, the Fleoifkjs and the Wowopfkjs. The Fleoifkjs reproduce wildly, while the Wowopfkjs are essentially parasites on the Fleoifkjs, needing their bodies to reproduce and then killing the host Fleoifkjs. If we let f_k and w_k be the number of Fleoifkjs and Wowopfkjs at the end of year k , respectively. Then their populations are governed by the rule

$$\begin{pmatrix} f_{k+1} \\ w_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{13}{8} & -\frac{3}{8} \\ \frac{3}{8} & \frac{3}{8} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_k \\ w_k \end{pmatrix}.$$

- Show that in the long term, both populations are growing. Determine the growth rate and the eventual ratio of Fleoifkjs to Wowopfkjs. (*Note:* You do not need a calculator to do this problem)
- If there are few Fleoifkjs and too many of the parasitic Wowopfkjs around initially, both populations will perish. Find this critical ratio of Fleoifkjs to Wowopfkjs below which both populations are doomed to oblivion.

7] A country is divided into three demographic regions. It is found that each year 5% of the residents of region 1 move to region 2, and 5% move to region 3. Of the residents of region 2, 15% move to region 1 and 10% move to region 3. And of the residents of region 3, 10% move to region 1 and 5% move to region 2. What percentage of the population resides in each of the three regions after a long period of time?