

## 線形代数 II・数学 II — 期末試験

2012 年 1 月 12 日

時間 60 分

- 筆記用具以外の持ち込みは不可。
- 最終的な答えだけを書くのではなく途中の計算や説明も書くこと。これがない場合、大幅な減点をすることもある。

1  $\mathbf{R}^4$  のベクトル  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4$  を

$$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$$

と定義し、 $A$  をこれらの列ベクトルを並べてできる 4 次の正方行列とする。すなわち

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 7 & 8 & 5 \\ 3 & 5 & 1 & 3 \\ 4 & 9 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

とする。さらに、 $f_A$  を  $f_A(\vec{x}) = A\vec{x}$  で定義される  $\mathbf{R}^4$  から  $\mathbf{R}^4$  への線形写像とする。

- 行列  $A$  の階数を求めよ。
- $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4$  は一次独立かどうかを判定せよ。一次従属であれば、これらのベクトルの間の一次関係式を求めよ。
- $\vec{a}_4$  は  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$  の一次結合として表わせる否かを判定せよ。
- $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4$  で生成される部分空間  $\langle \vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4 \rangle$  の基底をひとつ求め、その次元を求めよ。
- $f_A$  の像  $\text{Im } f_A$  の基底を求めよ。また、像  $\text{Im } f_A$  の次元を求めよ。
- $f_A$  の核  $\text{Ker } f_A$  の基底を求めよ。また、 $\text{Ker } f_A$  の次元を求めよ。

2 行列  $A$  を次のように定義する。

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -6 \\ -2 & 3 & 6 \\ 2 & -1 & -4 \end{pmatrix}$$

- $A$  の固有値と固有ベクトルを求めよ。
- $A$  を対角化せよ。

3  $M = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.2 \\ 0.4 & 0.8 \end{pmatrix}$  とする。

- $M$  の固有値と固有ベクトルを求めよ
- $M$  を対角化せよ。
- $\lim_{n \rightarrow \infty} M^n$  を求めよ。

【裏に続く】

4 とある国の携帯電話のマーケットでは A 社, D 社, S 社の 3 社がシェアを奪い合っている. 動向調査によれば, A 社の契約者は 1 期後には, 70% が契約を継続するが, 20% は D 社に変更し, 10% は S 社に変更する. また, D 社の契約者は 1 期後には, 80% が D 社との契約を継続するが, 10% は A 社に変更し, 10% は S 社に変更する. さらに, S 社の契約者は 1 期後には, 60% が S 社との契約を継続するが, 20% は A 社に変更し, 20% は D 社に変更する. このような動向が長期間にわたって続くとすると, 各社のマーケットシェアは一定に近づく. シェアを表すベクトルは契約者の動向を表す行列  $M$  の固有値 1 の固有ベクトルとなることを利用し, 各社のシェアを求めよ.