学生証番号 : ____________________　氏名 : ________________________

$\boxed{1}$ $\mathbf{R}^4$ のベクトル $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$ のうち，$x + y + z + w = 0$ をみたすもの全体からなるの部分集合を V とする．V は $\mathbf{R}^4$ の部分空間であることを示せ．

$\boxed{2}$ $\mathbf{R}^4$ のベクトル $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$ のうち，$s\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$，（$s, t$ は実数）の形に表せるベクトル全体からなる部分集合を W とする．W は $\mathbf{R}^4$ の部分空間であることを示せ．

$\boxed{3}$ 次のそれぞれの 2 次元数ベクトル空間 $\mathbf{R}^2$ の部分集合は，$\mathbf{R}^2$ の部分空間とはならない．それぞれについて，部分空間とはならない理由を反例をあげることにより示せ．

a) $V_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \middle| \, 2x + 3y = 1 \right\}$

b) $V_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \middle| \, x^2 - y^2 = 0 \right\}$

c) $V_3 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \middle| \, x \geqq 0, y \geqq 0 \right\}$

【裏に続く】

$\boxed{4}$ V，W がともに $\mathbf{R}^n$ の部分空間であるとき，その共通部分

$$V \cap W = \{\vec{x} \mid \vec{x} \in V, \vec{x} \in W\}$$

もまた $\mathbf{R}^n$ の部分空間であることを証明せよ.

$\boxed{5}$ V，W がともに $\mathbf{R}^n$ の部分空間であるとき，その和空間

$$V + W = \{\vec{x} + \vec{y} \mid \vec{x} \in V \mid \vec{y} \in W\}$$

もまた $\mathbf{R}^n$ の部分空間であることを証明せよ.

$\boxed{6}$ n 次元ベクトル $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbf{R}^n$ と (m, n) 型の行列 A の間の積について

$$A(\vec{a} + \vec{b}) = A\vec{a} + A\vec{b}, \quad A(c\vec{a}) = cA\vec{a} \quad (c \text{ は実数})$$

をみたす．このことを用いて 1 次同次方程式 $A\vec{x} = \vec{0}$ の解全体の集合

$$V = \{\vec{x} \in \mathbf{R}^n \mid A\vec{x} = \vec{0}\}$$

は $\mathbf{R}^n$ の部分空間であることを証明せよ.