

1 \mathbf{R}^4 のベクトル $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$ のうち, $x + y + z + w = 0$ をみたすもの全体からなる部分集合を V とする. V は \mathbf{R}^4 の部分空間であることを示せ.

2 \mathbf{R}^4 のベクトル $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$ のうち, $s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, (s, t は実数) の形に表せるベクトル全体からなる部分集合を W とする. W は \mathbf{R}^4 の部分空間であることを示せ.

学生証番号 : _____ 氏名 : _____

3] 次のそれぞれの2次元ベクトル空間 \mathbf{R}^2 の部分集合は, \mathbf{R}^2 の部分空間とはならない. それぞれについて, 部分空間とはならない理由を反例をあげるにより示せ.

a) $V_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid 2x + 3y = 1 \right\}$

b) $V_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid x^2 - y^2 = 0 \right\}$

c) $V_3 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid x \geq 0, y \geq 0 \right\}$

4] V, W がともに \mathbf{R}^n の部分空間であるとき, その共通部分

$$V \cap W = \{\vec{x} \mid \vec{x} \in V, \vec{x} \in W\}$$

もまた \mathbf{R}^n の部分空間であることを証明せよ.

5] V, W がともに \mathbf{R}^n の部分空間であるとき, その和空間

$$V + W = \{\vec{x} + \vec{y} \mid \vec{x} \in V \mid \vec{y} \in W\}$$

もまた \mathbf{R}^n の部分空間であることを証明せよ.

6 n 次元ベクトル $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbf{R}^n$ と (m, n) 型の行列 A の間の積について

$$A(\vec{a} + \vec{b}) = A\vec{a} + A\vec{b}, \quad A(c\vec{a}) = cA\vec{a} \quad (c \text{ は実数})$$

をみたま。このことを用いて 1 次同次方程式 $A\vec{x} = \vec{0}$ の解全体の集合

$$V = \{\vec{x} \in \mathbf{R}^n \mid A\vec{x} = \vec{0}\}$$

は \mathbf{R}^n の部分空間であることを証明せよ。