

1] 3つの空間ベクトル $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ について「交代積」呼ばれる積 $\vec{a} \wedge \vec{b} \wedge \vec{c}$ が定義される. 交代積の値はスカラー (実数) であり, 以下の性質を持つ.

- 【定数倍】 $(k\vec{a}) \wedge \vec{b} \wedge \vec{c} = \vec{a} \wedge (k\vec{b}) \wedge \vec{c} = \vec{a} \wedge \vec{b} \wedge (k\vec{c}) = k(\vec{a} \wedge \vec{b} \wedge \vec{c})$
- 【分配法則】 $(\vec{a}_1 + \vec{a}_2) \wedge \vec{b} \wedge \vec{c} = \vec{a}_1 \wedge \vec{b} \wedge \vec{c} + \vec{a}_2 \wedge \vec{b} \wedge \vec{c}$
 $\vec{a} \wedge (\vec{b}_1 + \vec{b}_2) \wedge \vec{c} = \vec{a} \wedge \vec{b}_1 \wedge \vec{c} + \vec{a} \wedge \vec{b}_2 \wedge \vec{c}$
 $\vec{a} \wedge \vec{b} \wedge (\vec{c}_1 + \vec{c}_2) = \vec{a} \wedge \vec{b} \wedge \vec{c}_1 + \vec{a} \wedge \vec{b} \wedge \vec{c}_2$
- 【交代性】 (2つの項を入れ替えると符号が変わる.)
 $\vec{a} \wedge \vec{c} \wedge \vec{b} = \vec{c} \wedge \vec{b} \wedge \vec{a} = \vec{b} \wedge \vec{a} \wedge \vec{c} = -(\vec{a} \wedge \vec{b} \wedge \vec{c})$
- 【正規性】 (単位立方体の体積は1.) $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ とするとき, $\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2 \wedge \vec{e}_3 = 1$.

a) 交代性を用い, $\vec{a} \wedge \vec{a} \wedge \vec{b} = \vec{a} \wedge \vec{b} \wedge \vec{a} = \vec{b} \wedge \vec{a} \wedge \vec{a} = 0$ であることを示せ.

b) $\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3, \vec{b} = b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2 + b_3\vec{e}_3, \vec{c} = c_1\vec{e}_1 + c_2\vec{e}_2 + c_3\vec{e}_3$ とするとき, 交代積の分配法則を用いて $\vec{a} \wedge \vec{b} \wedge \vec{c}$ を展開し, その他の性質を用いてなるべく簡単にせよ.

2) 次の各々の行列式をもとめよ.

a)
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$$

b)
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -2 & -3 & 2 \\ 3 & 7 & 7 \end{vmatrix}$$