

1 $\triangle OAB$ において $\vec{OA} = \vec{a}$, $\vec{OB} = \vec{b}$, $\angle AOB = \theta$ とおくと $\triangle OAB$ の面積 S は

$$S = \frac{1}{2} |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \theta$$

と表せる.

a) $0 < \theta < 180^\circ$ のとき, $\sin \theta$ を $|\vec{a}|$, $|\vec{b}|$ と内積 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ を用いて表せ.

b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$ とする. $\triangle OAB$ の面積を a, b, c, d を用いて表せ.

学生証番号 : _____ 氏名 : _____

2] 2つの平面ベクトル \vec{a}, \vec{b} について「交代積」呼ばれる積 $\vec{a} \wedge \vec{b}$ が定義される. ベクトルの内積同様, 交代積の値はスカラー (実数) である. 交代積「 \wedge 」は以下の性質を持つ.

- 【定数倍】 $(k\vec{a}) \wedge \vec{b} = \vec{a} \wedge (k\vec{b}) = k(\vec{a} \wedge \vec{b})$
- 【分配法則】 $(\vec{a}_1 + \vec{a}_2) \wedge \vec{b} = \vec{a}_1 \wedge \vec{b} + \vec{a}_2 \wedge \vec{b}$, $\vec{a} \wedge (\vec{b}_1 + \vec{b}_2) = \vec{a} \wedge \vec{b}_1 + \vec{a} \wedge \vec{b}_2$
- 【交代性】 (2つの項を入れ替えると符号が変わる.) $\vec{b} \wedge \vec{a} = -(\vec{a} \wedge \vec{b})$
- 【正規性】 (単位正方形の体積は1.) $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ とするとき, $\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2 = 1$

a) 交代性を用い, $\vec{a} \wedge \vec{a} = 0$ であることを示せ.

b) 分配法則を用いて $(a\vec{e}_1 + c\vec{e}_2) \wedge (b\vec{e}_1 + d\vec{e}_2)$ を展開し, その他の性質を用いてなるべく簡単にせよ.

□3 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$ とする.

行列式 $|A|$ と $|B|$ およびその積の行列式 $|AB|$ を計算し, $|AB| = |A||B|$ であることを証明せよ.

