

線形代数 I・数学 II — 期末試験

2011 年 7 月 21 日

時間 60 分

- 筆記用具以外の持ち込みは不可。
- 最終的な答えだけを書くのではなく途中の計算や説明も書くこと。これがない場合、大幅な減点をすることもある。

1] 次の連立 1 次方程式を掃き出し法を用いて解け。

$$\begin{cases} x + 2y + 3z + 4w = 0 \\ 3x + 6y + 7z + 6w = 0 \\ 5x + 10y + 11z + 8w = 0 \\ 7x + 14y + 15z + 10w = 0 \end{cases}$$

2] 行列 A とベクトル \vec{x} , \vec{b} を

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 5 & 1 \\ 4 & 4 & 8 & 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ a \end{pmatrix}$$

と定義する。このとき行列 $(A | \vec{b})$ は行に関する基本変形によって下のように変形される。

$$(A | \vec{b}) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 1 \\ 4 & 4 & 8 & 1 & a \end{array} \right) \rightarrow \cdots \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a-5 \end{array} \right)$$

- 行列 A の階数を求めよ。
- 行列 A は逆行列 A^{-1} を持つか？ 持つ場合は A^{-1} を求めよ。
- 方程式 $A\vec{x} = \vec{0}$ の解をすべて求めよ。
- 方程式 $A\vec{x} = \vec{b}$ が解を持つように定数 a を決め、そのときの解をすべて求めよ。

3] a) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ -1 & -3 & -1 \\ -3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ の逆行列をもとめよ。

- 次の連立一次方程式の解を b) の結果を用いて求めよ。

$$\begin{cases} x - y - 3z = -1 \\ -x - 3y - z = 1 \\ -3x - y + z = -5 \end{cases}$$

【裏に続く】

4 次の各々の行列式をもとめよ.

$$\begin{array}{l} \text{a)} \begin{vmatrix} -3 & 5 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} \\ \text{b)} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 3 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} \\ \text{c)} \begin{vmatrix} -1 & 0 & 4 & 0 \\ 6 & -3 & 11 & -5 \\ 13 & 0 & -6 & 7 \\ -2 & 0 & 5 & 0 \end{vmatrix} \end{array}$$

5 それぞれ庭付きの家を持つ3人の職人（大工・左官・庭師）がお互いの家の修理と庭の手入れをしあうことになった。それぞれ下の予定表の通り10日間ずつ働くものとする。

	作業をした人		
	大工	左官	庭師
大工の家での作業日数	2	2	5
左官の家での作業日数	4	5	2
庭師の家での作業日数	4	3	3

税法上、3人がそれぞれが行った作業について妥当な額の日当を定め、お互いに支払いをしたうえで、その領収書を確定申告の際に添付しなければならない。各人の普段の日当はだいたい1万円ぐらいであるが、3人はそれを若干上下させて、実際の支払いは行わなくてすむようにすることで同意した。つまり、それぞれの収入総額と支払総額が一致するようにして、領収書のみを交換することにした。このようにするにはそれぞれの日当をどのように定めればよいか、なるべく各人の日当に端数がでない解をもとめよ。[3人の平均の日当が9700円になるようにすると各人の日当に端数がでない都合のよい解がある。]