

1  $\mathbf{R}^4$  のベクトル  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4$  を

$$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 9 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 8 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 7 \\ a \end{pmatrix}$$

と定義し,  $A = (\vec{a}_1 | \vec{a}_2 | \vec{a}_3 | \vec{a}_4)$  を列ベクトル  $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_4$  を並べてできる 4 次の正方行列とする. このとき行列  $(A | \vec{b})$  は行に関する基本変形によって下のように変形される.

$$(A | \vec{b}) = \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 7 & 3 & 5 & 3 \\ 2 & 9 & 5 & 8 & 7 \\ 1 & 5 & 3 & 5 & a \end{array} \right) \rightarrow \dots \rightarrow \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a+1 \end{array} \right)$$

- 行列  $A$  の階数を求めよ.
- 行列  $A$  の行列式  $|A|$  を求めよ.
- 行列  $A$  は逆行列  $A^{-1}$  を持つか? 持つ場合は  $A^{-1}$  を求めよ.
- 方程式  $A\vec{v} = \vec{0}$  の解をすべて求めよ.
- 方程式  $A\vec{v} = \vec{b}$  が解を持つように定数  $a$  を決め, そのときの解をすべて求めよ.

2  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & -3 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$  の逆行列  $A^{-1}$  を求め, その結果を用いて次の連立一次方程式の解を求めよ.

$$\begin{cases} x + y - 3z = 3 \\ x - 3y + z = -4 \\ -3x + y + z = 1 \end{cases}$$

3) 次の各々の行列式を求めよ.

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\text{b) } \begin{vmatrix} 1 & a & a^3 \\ 1 & b & b^3 \\ 1 & c & c^3 \end{vmatrix}$$

4) Three neighbors have backyard vegetable gardens. Neighbor A grows tomatoes, neighbor B grows corn, and neighbor C grows lettuce. They agree to divide their crops among themselves as follows: A gets  $\frac{1}{2}$  of the tomatoes,  $\frac{1}{3}$  of the corn, and  $\frac{1}{4}$  of the lettuce. B gets  $\frac{1}{3}$  of the tomatoes,  $\frac{1}{3}$  of the corn, and  $\frac{1}{4}$  of the lettuce. C gets  $\frac{1}{6}$  of the tomatoes,  $\frac{1}{3}$  of the corn, and  $\frac{1}{2}$  of the lettuce. What prices should the neighbors assign to their respective crops if the equilibrium condition of a closed economy is to be satisfied, and if the lowest-priced crop is to have a price of \$100?