

漸近展開

$x = 0$  のまわりで定義された関数  $\varepsilon(x)$  が、 $x \rightarrow 0$  としたとき  $0$  に近づいたら、すなわち  $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$  が成り立つなら、 $\varepsilon(x)$  は無限小であるという。例として、 $n > 0$  のとき、関数  $x^n$  は無限小である。また、 $n$  が大きくなればなるほど、 $x^n$  が  $0$  に近づくと速さが速くなる。そこで、 $\varepsilon(x)$  が  $n$  次より高次の無限小であることを  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varepsilon(x)}{x^n} = 0$  と定義する。いま、 $f(x)$  と  $g(x)$  の差が  $n$  次より高次の無限小であるとき、これを  $f(x) = g(x) + o(x^n)$  と書く。これは  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - g(x)}{x^n} = 0$  であることを表す略記法である。

$$f(x) = (n \text{ 次の多項式}) + o(x^n)$$

という形の式を  $f(x)$  の  $x = 0$  のまわりでの漸近展開と呼ぶ。このとき通常は  $o(x^n)$  は「 $x^{n+1}$  以上の項」をひとくくりにしたものと考えて差し支えない。 $f(x)$  が  $x = 0$  で  $n$  階微分可能であるとき、 $f(x)$  は

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n)$$

という漸近展開をもつことが証明できる。以下はこれを用いてつくられた漸近展開である。一般の関数の漸近展開はこれらの式から和・差・積・商および合成の操作を組み合わせて求めることができる。

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \dots + (-1)^n x^n + o(x^n)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$$

1 次の関数の  $x = 0$  のまわりの漸近展開を ( ) 内の次数の項まで求めよ。

- |   |  |   |
|---|--|---|
| a) $\sqrt{1-x}$ ( $x^4$ の項まで)             | b) $\frac{1}{1+x^2}$ ( $x^6$ の項まで)                   | c) $\frac{x}{1+x^3}$ ( $x^7$ の項まで)        |
| d) $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ( $x^6$ の項まで) | e) $\sqrt[3]{1+x^3}$ ( $x^9$ の項まで)                   | f) $\frac{e^x - e^{-x}}{2}$ ( $x^4$ の項まで) |
| g) $e^{-x} \sin x$ ( $x^4$ の項まで)          | h) $\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ ( $x^5$ の項まで) | i) $\log(1 + \sin x)$ ( $x^4$ の項まで)       |

2 漸近展開を用いて次の極限を求めよ。

- |   |   |  |
|---|---|--|
| a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \log(x+1)}{x^2}$ | b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{xe^x - x - x^2}{x - \log(1+x)}$    | c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x \sin x}$                      |
| d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^n - 1}{x}$     | e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x\sqrt{1+x} - \sin x}{1 - \cos x}$ | f) $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{\log(1+x)} \right)$ |