## 指数関数の導関数

$a$ が 1 でない正の定数のとき，$a$ を底とする $x$ の指数関数

$$f(x) = a^x$$

の導関数を求めたい．いま，$x$ が $x + h$ になるとすれば，

$$f(x+h) - f(x) = a^{x+h} - a^x = a^x(a^h - 1)$$

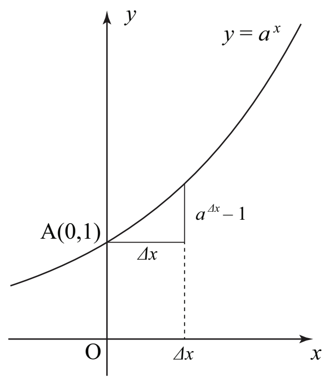
であるから，

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = a^x \cdot \frac{a^h - 1}{h} \tag{1}$$

となる．ここで，$h \to 0$ とすれば $f'(x)$ が得られるわけであるが，右の図において

$$\lim_{h \to 0} \frac{a^h - 1}{h}$$

というのは，曲線 $y = a^x$ の上の点 A(0, 1) における接線の傾きである．いま，それを $m_a$ で表すことにすれば，(1) から



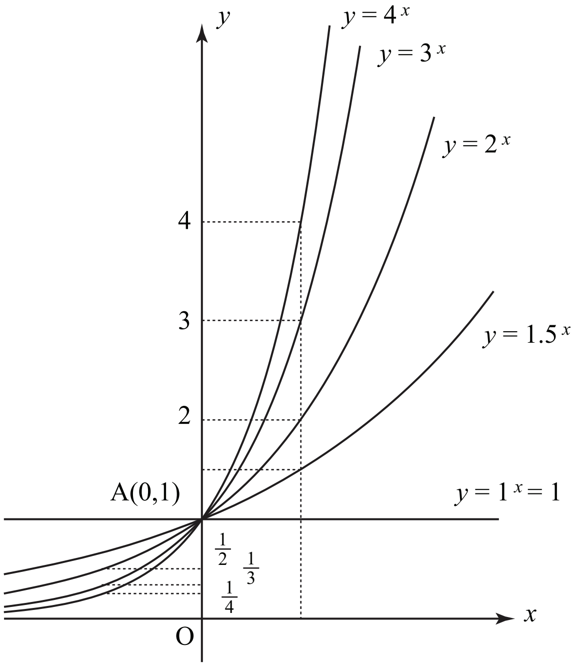

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \left(a^x \cdot \frac{a^h - 1}{h}\right) = a^x \cdot m_a \tag{2}$$

ということになる．

さて，次の項の図からわかるように，曲線 $y = a^x$ の上の点 A(0, 1) における接線の傾き $m_a$ は，$a$ が大きくなるほど大きくなる．したがって，ちょうど

$$m_a = 1$$

となるような $a$ の値があるであろうと考えられる．




いま，$m_a = 1$ となるような $a$ の値を $e$ という文字で表す．すなわち，$e$ は

(3)
$$\lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$$

をみたす数であるとする．すると (2) から，

$$f(x) = e^x \quad \text{ならば} \quad f'(x) = \lim_{h \to 0} e^x \cdot \frac{e^h - 1}{h} = e^x \cdot 1 = e^x$$

が得られる．

指数関数の導関数：

$$\left(e^x\right)' = e^x$$

この $e$ を底とする対数 $\log_e a$ は自然対数と呼ばれ，$\log_e a$ を単に $\log a$ と表すことが普通である．このため，$e$ は自然対数の底と呼ばれる．$e$ は Napier の数と呼ばれる

こともある．$e$ は無理数であって

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots = 2.7182828\cdots$$

であることが知られている．

つぎに，$f(x) = a^x$ の導関数を求めてみよう．まず，対数の定義から

$$a = e^{\log_e a}$$

であることに注意する．したがって，

$$a^x = \left(e^{\log_e a}\right)^x = e^{(\log_e a)x}$$

そこで，合成関数の微分法により

$$\begin{aligned}\left(a^x\right)' &= \left(e^{(\log_e a)x}\right)' = e^{(\log_e a)x} \cdot \left((\log_e a)x\right)' \\ &= (\log_e a)\, e^{(\log_e a)x} = (\log_e a)\, a^x\end{aligned}$$

を得る．

後に示す 2 つの表は $a = 2, 3$ のときの $\dfrac{a^h - 1}{h}$ の値を計算したものである．平方根が計算できる電卓のみを用いて計算できるように，$h = \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{8}, \ldots$ と，$h$ の値をつぎつぎに $\dfrac{1}{2}$ にして計算する．この表の結果をみると，$\displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{a^h - 1}{h} = 1$ となる $a$ の値，すなわち $e$ は，2 と 3 の間にあり，どちらかといえば 3 に近い値であることが予想される．

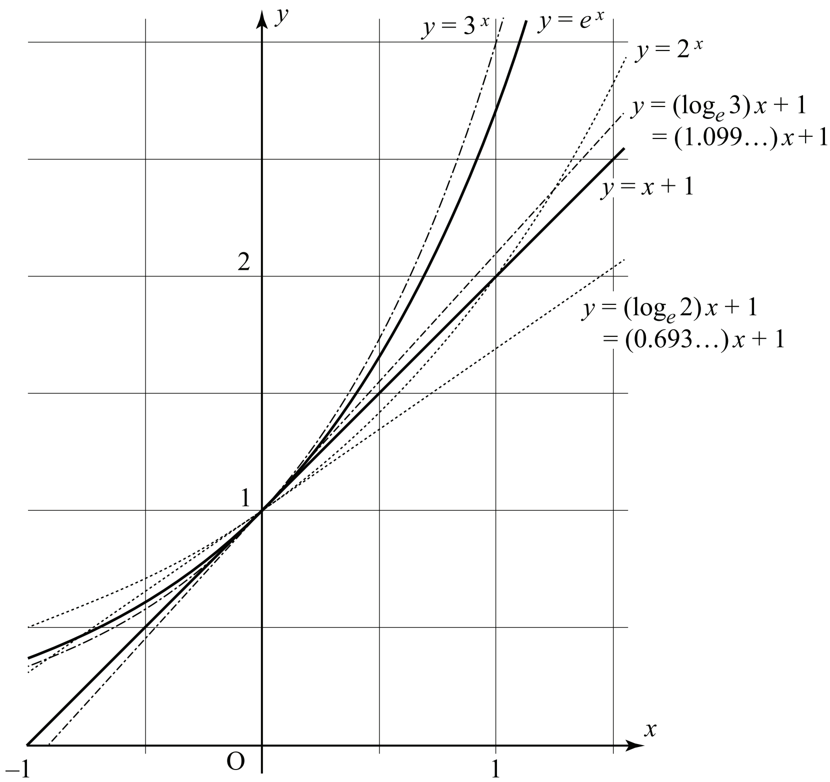
次の項のグラフは $y = 2^x$，$y = 3^x$，$y = e^x$ とそれぞれの $\mathrm{A}(0, 1)$ における接線を 1 つのグラフにしたものである．

さて，ここまでは，(3) のような定数 $e$ が存在することをグラフの上から直観的に認めたのであるが，本来はこのような $e$ が存在することを厳密に証明しなければならない．そこで，

$$\lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$$

において，$e^h - 1 = t$ とおけば，

$$e^h = 1 + t \qquad \therefore\ h = \log_e(1 + t)$$




であって，$h \to 0$ のとき $t \to 0$ であるから，(3) の式は

$$\lim_{t\to 0}\frac{t}{\log_e(1+t)} = 1 \qquad \therefore \lim_{t\to 0}\frac{\log_e(1+t)}{t} = 1$$

と同じことであり，これは，また

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\log_e(1+t) = 1 \qquad \therefore \lim_{t\to 0}\log_e(1+t)^{\frac{1}{t}} = 1$$

すなわち，

(4) $$\lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}} = e$$

というのと同じである．厳密な証明は，まず $\lim\limits_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}$ という極限値が存在することを証明し，その極限値を $e$ とすれば (3) が成り立つという順序で示していくのが一般的な方法である．

| $h$ | $2^h$ | $\dfrac{2^h - 1}{h}$ |
|---|---|---|
| $\frac{1}{2}$ | $\sqrt{2} = 1.4142136$ | $0.4142136 \times 2 \quad = 0.8284271$ |
| $\frac{1}{4}$ | $\sqrt{1.4142136} = 1.1892071$ | $0.1892071 \times 4 \quad = 0.7568285$ |
| $\frac{1}{8}$ | $\sqrt{1.1892071} = 1.0905077$ | $0.0905077 \times 8 \quad = 0.7240619$ |
| $\frac{1}{16}$ | $\sqrt{1.0905077} = 1.0442738$ | $0.0442738 \times 16 \quad = 0.7083805$ |
| $\frac{1}{32}$ | $\sqrt{1.0442738} = 1.0218971$ | $0.0218971 \times 32 \quad = 0.7007088$ |
| $\frac{1}{64}$ | $\sqrt{1.0218971} = 1.0108893$ | $0.0108893 \times 64 \quad = 0.6969143$ |
| $\frac{1}{128}$ | $\sqrt{1.0108893} = 1.0054299$ | $0.0054299 \times 128 \quad = 0.6950273$ |
| $\frac{1}{256}$ | $\sqrt{1.0054299} = 1.0027113$ | $0.0027113 \times 256 \quad = 0.6940864$ |
| $\frac{1}{512}$ | $\sqrt{1.0027113} = 1.0013547$ | $0.0013547 \times 512 \quad = 0.6936166$ |
| $\frac{1}{1024}$ | $\sqrt{1.0013547} = 1.0006771$ | $0.0006771 \times 1024 = 0.6933818$ |
| $\vdots$ | | $\downarrow$ |
| 0 | | 0.6931472 |

| $h$ | $3^h$ | $\dfrac{3^h-1}{h}$ |
|---|---|---|
| $\frac{1}{2}$ | $\sqrt{3} = 1.7320508$ | $0.7320508 \times 2 \quad = 1.4641016$ |
| $\frac{1}{4}$ | $\sqrt{1.7320508} = 1.3160740$ | $0.3160740 \times 4 \quad = 1.2642961$ |
| $\frac{1}{8}$ | $\sqrt{1.3160740} = 1.1472027$ | $0.1472027 \times 8 \quad = 1.1776215$ |
| $\frac{1}{16}$ | $\sqrt{1.1472027} = 1.0710755$ | $0.0710755 \times 16 \quad = 1.1372077$ |
| $\frac{1}{32}$ | $\sqrt{1.0710755} = 1.0349278$ | $0.0349278 \times 32 \quad = 1.1176885$ |
| $\frac{1}{64}$ | $\sqrt{1.0349278} = 1.0173140$ | $0.0173140 \times 64 \quad = 1.1080958$ |
| $\frac{1}{128}$ | $\sqrt{1.0173140} = 1.0086198$ | $0.0086198 \times 128 \quad = 1.1033405$ |
| $\frac{1}{256}$ | $\sqrt{1.0086198} = 1.0043007$ | $0.0043007 \times 256 \quad = 1.1009730$ |
| $\frac{1}{512}$ | $\sqrt{1.0043007} = 1.0021480$ | $0.0021480 \times 512 \quad = 1.0997918$ |
| $\frac{1}{1024}$ | $\sqrt{1.0021480} = 1.0010734$ | $0.0010734 \times 1024 = 1.0992018$ |
| $\vdots$ | | $\downarrow$ |
| 0 | | 1.0986123 |

## 対数関数の導関数

底が $e$ である対数を自然対数という．こんご単に $\log x$ と書けば，自然対数 $\log_e x$ を表すものとする．自然対数の導関数を求めよう．

一般に，$f(x)$ の逆関数を $f^{-1}(x)$ とすると，$f\left(f^{-1}(x)\right) = x$ が成り立つ．この両辺を $x$ で微分すると，合成関数の微分法により，

$$\left(f\left(f^{-1}(x)\right)\right)' = f'\left(f^{-1}(x)\right)\left(f^{-1}(x)\right)' = (x)' = 1$$

となり，逆関数の微分公式

$$\left(f^{-1}(x)\right)' = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}$$

を得る．ここで，$f(x) = e^x$ とおくと，$f^{-1}(x) = \log x$ であり，$f'(x) = e^x$ であるから，

$$\left(\log x\right)' = \frac{1}{e^{\log x}}$$

ここで，$e^{\log x} = x$ であることに注意すると，$\left(\log x\right)' = \dfrac{1}{x}$ を得る．

> 対数関数の導関数：
>
> $$\left(\log x\right)' = \frac{1}{x}$$

対数関数の導関数は次のようにしても求められる．

$$\begin{aligned}(\log x)' &= \lim_{h \to 0} \frac{\log(x+h) - \log x}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \log\left(1 + \frac{h}{x}\right)\end{aligned}$$

であって，$t = \dfrac{h}{x}$ とおけば，$h \to 0$ のとき $t \to 0$ であるから，

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \log\left(1 + \frac{h}{x}\right) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{xt} \log(1+t) = \frac{1}{x} \lim_{t \to 0} \log(1+t)^{\frac{1}{t}}$$

ここで，(4) を用いると，

$$\frac{1}{x}\lim_{t\to 0}\log(1+t)^{\frac{1}{t}} = \frac{1}{x}\lim_{t\to 0}\log e = \frac{1}{x}$$

すなわち，$(\log x)' = \dfrac{1}{x}$ を得る．

一般の対数関数 $\log_a(x)$ については，底の変換公式により，次を得る．

$$(\log_a x)' = \left(\frac{\log x}{\log a}\right)' = \frac{1}{x\log a}$$

## $e$ について補足

極限 $\displaystyle\lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}} = e$ の意味を次のように考えることができる．いま，一万円の元金に年利率 1（10 割，もちろん違法）で利息をつければ，1 年後には 2 万円となるが，これの代わりに，利率 $\dfrac{1}{n}$，$\dfrac{1}{n}$ 年ごとの複利法で利息をつけると，1 年間には $n$ 回利息が付き，1 年後の元利合計は $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$（万円）となる．（下の表参照）したがって，

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) = \lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}} = e$$

とは，瞬間ごとに利息の付いていく複利法の元利合計と考えられる．自然界には，このような連続複利法則にしたがうと考えられる現象も多いが，それらの研究において，この $e$ という数は欠くことのできない大切なものである．

| $t = \frac{1}{n}$ | $(1+t)^{\frac{1}{t}} = \left(\frac{1}{n}\right)^n$ | |
|---|---|---|
| 1 | $(1+1)^1$ | $= 2$ |
| 0.1 | $(1+0.1)^{0.1}$ | $= 2.59374$ |
| 0.01 | $(1+0.01)^{0.01}$ | $= 2.70481$ |
| 0.001 | $(1+0.001)^{0.001}$ | $= 2.71692$ |
| 0.0001 | $(1+0.0001)^{0.0001}$ | $= 2.71815$ |
| 0.00001 | $(1+0.00001)^{0.00001}$ | $= 2.71827$ |
| $\vdots$ | | $\downarrow$ |
| | | $2.71828\ldots$ |