

微分積分 I — 期末試験

2011 年 7 月 20 日

時間 60 分

- 筆記用具以外の持ち込みは不可。
- 最終的な答えだけを書くのではなく途中の計算や説明も書くこと。これがない場合、大幅な減点をすることもある。

1] $f(x) = \sqrt{-2x+8}$ とする。以下の問いに答えよ。

- 関数 $y = f(x)$ の定義域と値域を求めよ
- $y = f(x)$ の逆関数 $y = f^{-1}(x)$ を求めよ。
- 逆関数 $y = f^{-1}(x)$ の定義域と値域を求めよ。
- x が 2 から 4 まで変化するときの $f(x)$ の平均変化率を求めよ。
- $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を求めよ。
- $x = 2$ における $f(x)$ の微分係数 $f'(2)$ を求めよ。
- $y = f(x)$ のグラフの $(2, 2)$ における接線の方程式を求めよ。
- $y = f(x)$ のグラフ、 $y = f(x)$ の $(2, 2)$ における接線、逆関数 $y = f^{-1}(x)$ のグラフ、および直線 $y = -\frac{3}{2}x - 2$ の 4 つを解答用紙の座標平面内に描け。
- グラフを利用して不等式 $\sqrt{-2x+8} > -\frac{3}{2}x - 2$ を解け。

2] 関数 $f(x) = 2e^{-2x^2}$ の増減とグラフの凹凸を調べ、そのグラフの概形を描け。また、 $f(x)$ の極大値・極小値とグラフの変曲点を求めよ。[必要ならば $e \doteq 2.718$, $\frac{1}{e^2} \doteq 0.135$, $\frac{1}{\sqrt{e}} \doteq 0.607$ を用いよ。]

3] $f(x) = \frac{x-5}{x-3}$ とする。以下の問いに答えよ。

- $x = 1$ における $f(x)$ の微分係数 $f'(1)$ を定義にしたがって（極限を直接計算することによって）求めよ。
- $y = f(x)$ のグラフは $y = \frac{k}{x}$ のグラフを x 軸方向に p 、 y 軸方向に q だけ平行移動した曲線である。 k , p , q は何かを答えよ。
- $y = f(x)$ の逆関数 $y = f^{-1}(x)$ を求めよ。
- 関数 $y = f(x)$ の定義域と値域、および逆関数 $y = f^{-1}(x)$ の定義域と値域を求めよ。
- $g(x) = \frac{3x+3}{x-1}$ とする。合成関数 $(g \circ f)(x)$ と $(f \circ g)(x)$ を求めよ。

4] 次の各々の関数の導関数を求めよ。

a) $f(x) = (3x^2 - 2x + 1)^5$

b) $f(x) = \frac{x-1}{x^2-x+1}$

c) $f(x) = \frac{1}{1+\sqrt{x}}$

d) $f(x) = \sqrt[3]{1-3x^4}$

e) $f(x) = xe^{1-x^2}$

f) $f(x) = \frac{\log x}{x}$

【裏に続く】

5 関数 $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$ について a から $a + h$ までの平均変化率 $\frac{f(a + h) - f(a)}{h}$ ($h \neq 0$) を求め、できるだけ簡単にせよ.

6 $f(x) = xe^{-x+2}$ とする. $0 \leq x \leq 2$ の範囲での $f(x)$ の最大値と最小値を求めよ.

7 【ボーナス問題】 $0 < x < 1$ のとき, 不等式 $\log(1 + x) > x - \frac{x^2}{2}$ が成り立つことを証明せよ.