復習問題

- キーワード：
  分数関数のグラフ，無理関数のグラフ，合成関数・逆関数，平均変化率，瞬間変化率（=微分係数），導関数，接線の傾きと方程式，積・商の微分公式，合成関数の微分法，増減表，極大・極小，凹凸，変曲点．

1 関数 $f(x) = \dfrac{x-5}{x-3}$ について以下の問いに答えよ．

a) x が 1 から 2 まで変化するときの $f(x)$ の平均変化率を求めよ．

b) $x = 1$ における $f(x)$ の微分係数 $f'(1)$ を定義にしたがって（極限を直接計算することによって）求めよ．

c) $y = f(x)$ のグラフの $(1, 2)$ における接線の方程式を求めよ．

d) $y = f(x)$ のグラフは $y = \dfrac{k}{x}$ のグラフを x 軸方向に p， y 軸方向に q だけ平行移動した曲線である．k，p，q は何かを答えよ．

e) $y = f(x)$ のグラフと $(1, 2)$ における接線を描け．

f) グラフを利用して不等式 $\dfrac{x-5}{x-3} > -x+3$ を解け．

2 $f(x) = -\sqrt{2x-1}$ として前問の a) b) c) e) に答よ．

3 $f(x) = \sqrt{-4x+6}$ とする．以下の問いに答えよ．

a) 関数 $y = f(x)$ 定義域と値域を求めよ

b) $y = f(x)$ の逆関数 $y = f^{-1}(x)$ を求めよ．

c) 逆関数 $y = f^{-1}(x)$ の定義域と値域を求めよ．

4 グラフを利用して，次の不等式を解け．

a) $\dfrac{2x-1}{x-1} < x+1$　　b) $\sqrt{-4x+8} \geqq x+1$

5 a を定数とし，$f(x) = \dfrac{1}{1-x}, g(x) = \dfrac{x+a}{x}$ とする．

a) $(g \circ f)(x)$ と $(f \circ g)(x)$ を求めよ．

b) $(g \circ f)(x)$ と $(f \circ g)(x)$ が同じ関数になるように，定数 a の値を定めよ．

6 次のおのおのの関数について，その定義域と値域を求めよ．また，それぞれの逆関数を求め，逆関数の定義域と値域も求めよ．

a) $f(x) = \dfrac{2x-1}{x+2}$　　b) $f(x) = -\log(1-x)$

7 次の関数を変数 x で微分せよ．

a) $f(x) = (2x^3+5)^7$　　b) $f(x) = \dfrac{1}{(x^2-3)^2}$　　c) $f(x) = (x^2+3)(x^2-2x+2)$

d) $f(x) = \dfrac{2x-5}{3x^2+1}$　　e) $f(x) = \dfrac{x^4+3x-2}{x^2}$　　f) $f(x) = \dfrac{x}{x^2-x+1}$

【裏につづく】

g) $f(x) = \dfrac{1}{x\sqrt{x}}$　　h) $f(x) = \sqrt[3]{2x^2+5}$　　i) $f(x) = \dfrac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}$

j) $f(x) = e^{-3x^2}$　　k) $f(x) = x^2e^{-x}$　　l) $f(x) = \dfrac{e^x}{1-e^x}$

m) $f(x) = \dfrac{x}{(\log x - 1)}$　　n) $f(x) = \log(x^2+1)$　　o) $f(x) = e^x \log x$

$\boxed{8}$ 次の関数の増減，極値，グラフの凹凸および変曲点を調べ，そのグラフをかけ．

a) $f(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 1$　　b) $f(x) = \dfrac{12}{x^2-2x+4}$

c) $f(x) = e^{-x^2/2}$　　d) $f(x) = \dfrac{1}{x} + \log x$

$\boxed{9}$ 次の関数の最大値，最小値を求めよ．

a) $(x-1)\sqrt{1-x^2}$ $(-1 \leqq x \leqq 1)$　　b) $(2x-1)e^{-2x}$ $(0 \leqq x \leqq 3)$

$\boxed{10}$ 球が毎秒 8 cm^3 の割合で体積を増しているとする．体積を増し始めてから t 秒後の球の半径，表面積，体積を、それぞれ r cm，S cm^2，V cm^3 とするとき、$r = 2$ のときの変化率 $\dfrac{dV}{dt}$，$\dfrac{dr}{dt}$，$\dfrac{dS}{dt}$ をそれぞれ求めよ．