1 関数 $f(x)$ と $g(x)$ の積の微分公式を書け.

$\big(f(x)g(x)\big)' =$

2 積の微分公式を用いて次の関数を変数 x で微分せよ.

a) $f(x) = (x^2+3)(x^2-2x+2)$

$f'(x) =$

b) $f(x) = (x^2-x+1)(x+1)$

$f'(x) =$

3 $f(x)g(x)h(x) = \big(f(x)g(x)\big)h(x)$ であることと積の微分公式を用いて 3 つの関数の積の導関数 $\big(f(x)g(x)h(x)\big)'$ を求めよ.

4 任意の自然数 n について $(x^n)' = nx^{n-1}$ であることを数学的帰納法で証明したい．そこで，自然数 n に対し $f_n(x) = x^n$ とおいて，$f_n{}'(x) = nx^{n-1}$ がすべての n について成り立つことを示せ.

(I) $n=1$ のとき．$f_1(x) = x$ だから，$f_1'(x)$ を定義に基づいて計算すると

$$f_1{}'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f_1(x+h)-f_1(x)}{h} =$$

したがって $n=1$ のときは成立する.

(II) $n=k$ のとき成り立つとすると，$f_k{}'(x) = kx^{k-1}$．いま，$f_{k+1}(x) = f_1(x)f_k(x)$ だから，積の微分公式を用いて $f'_{k+1}(x)$ を計算すると

$f_{k+1}{}'(x) = \big(f_1(x)f_k(x)\big)' =$

したがって $n=k+1$ のときも成立する.

(I), (II) より，$f_n{}'(x) = nx^{n-1}$ がすべての n について成り立つ.

5 $g(x)$ を任意の関数とするとき，関数 $f(x) = \dfrac{1}{g(x)}$ の導関数を定義にしたがって求めたい.

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{1}{g(x+h)} - \dfrac{1}{g(x)}}{h} =$$

ここで，$\displaystyle\lim_{h\to 0} g(x+h) = g(x)$, $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h} = g'(x)$ を用いると

$f'(x) =$　　　　すなわち，$\left(\dfrac{1}{g(x)}\right)' =$

6 関数 $f(x) = \dfrac{1}{g(x)}$ の導関数を 問題５とは別の方法で求める.

a) $f(x) = \dfrac{1}{g(x)}$ の分母を払った式 $f(x)g(x) = 1$ の両辺を微分せよ.

b) a) で求めた式を $f'(x)$ について解き，$f'(x)$ を $g(x)$ と $g'(x)$ のみで表せ.

7 問題５で得た商の微分公式において $g(x) = x^n$ とおくことにより，$\left(\dfrac{1}{x^n}\right)'$ を求めよ．

8 問題７の結果を負の数の指数を用いて表すことにより $(x^{-n})'$ の微分公式を求めよ．

9 $\dfrac{f(x)}{g(x)} = f(x) \times \dfrac{1}{g(x)}$ である．この右辺を積の微分公式を用いて微分し，問題５の商の微分公式を用いることにより，$\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)'$ を求めよ．

10 次の関数を変数 x で微分せよ．

a) $f(x) = \dfrac{1}{3x^3}$

$f'(x) =$

b) $f(x) = \dfrac{x-2}{x+3}$

$f'(x) =$

c) $f(x) = \dfrac{x^4+3x-2}{x^2}$

$f'(x) =$

d) $f(x) = \dfrac{x}{x^2-x+1}$

$f'(x) =$