

1 関数 $f(x)$ と $g(x)$ の積の微分公式を書け.

$$(f(x)g(x))' =$$

2 積の微分公式を用いて次の関数を変数 x で微分せよ.

a) $f(x) = (x^2 + 3)(x^2 - 2x + 2)$

$$f'(x) =$$

b) $f(x) = (x^2 - x + 1)(x + 1)$

$$f'(x) =$$

3 $f(x)g(x)h(x) = (f(x)g(x))h(x)$ であることと積の微分公式を用いて 3 つの関数の積の導関数 $(f(x)g(x)h(x))'$ を求めよ.

4 任意の自然数 n について $(x^n)' = nx^{n-1}$ であることを数学的帰納法で証明したい. そこで, 自然数 n に対し $f_n(x) = x^n$ とおいて, $f_n'(x) = nx^{n-1}$ がすべての n について成り立つことを示せ.

(I) $n = 1$ のとき. $f_1(x) = x$ だから, $f_1'(x)$ を定義に基づいて計算すると

$$f_1'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_1(x+h) - f_1(x)}{h} =$$

したがって $n = 1$ のときは成立する.

(II) $n = k$ のとき成り立つとすると, $f_k'(x) = kx^{k-1}$. いま, $f_{k+1}(x) = f_1(x)f_k(x)$ だから, 積の微分公式を用いて $f_{k+1}'(x)$ を計算すると

$$f_{k+1}'(x) = (f_1(x)f_k(x))' =$$

したがって $n = k + 1$ のときも成立する.

(I), (II) より, $f_n'(x) = nx^{n-1}$ がすべての n について成り立つ.

学生証番号 : _____ 氏名 : _____

5 $g(x)$ を任意の関数とすると、関数 $f(x) = \frac{1}{g(x)}$ の導関数を定義にしたがって求めたい。

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{g(x+h)} - \frac{1}{g(x)}}{h} =$$

ここで、 $\lim_{h \rightarrow 0} g(x+h) = g(x)$, $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = g'(x)$ を用いると

$$f'(x) = \quad \quad \quad \text{すなわち, } \left(\frac{1}{g(x)} \right)' =$$

6 関数 $f(x) = \frac{1}{g(x)}$ の導関数を 問題5 とは別の方法で求める。

a) $f(x) = \frac{1}{g(x)}$ の分母を払った式 $f(x)g(x) = 1$ の両辺を微分せよ。

b) a) で求めた式を $f'(x)$ について解き、 $f'(x)$ を $g(x)$ と $g'(x)$ のみで表せ。

7 問題5で得た商の微分公式において $g(x) = x^n$ とおくことにより, $\left(\frac{1}{x^n}\right)'$ を求めよ.

8 問題7の結果を負の数の指数を用いて表すことにより $(x^{-n})'$ の微分公式を求めよ.

9 $\frac{f(x)}{g(x)} = f(x) \times \frac{1}{g(x)}$ である. この右辺を積の微分公式を用いて微分し, 問題5の商の微分公式を用いることにより, $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'$ を求めよ.

10 次の関数を変数 x で微分せよ.

a) $f(x) = \frac{1}{3x^3}$

$f'(x) =$

b) $f(x) = \frac{x-2}{x+3}$

$f'(x) =$

c) $f(x) = \frac{x^4 + 3x - 2}{x^2}$

$f'(x) =$

d) $f(x) = \frac{x}{x^2 - x + 1}$

$f'(x) =$