練習問題 3

$\boxed{1}$ C を $X^3+Y^3=Z^3$ で定義された射影平面 $\mathbb{P}^2$ の内の曲線とする．C から $Z=0$ を除いて得られる開集合を U，C から $Y=0$ を除いて得られる開集合を V とする．$x=\dfrac{X}{Z}$，$y=\dfrac{Y}{Z}$ とおいて U 上の正則関数環 $\mathrm{O}_C(U)$ を $A=k[x,y]/(x^3+y^3-1)$ と同一視し，$\xi=\dfrac{X}{Y}$，$\zeta=\dfrac{Z}{Y}$ とおいて $\mathrm{O}_C(V)$ を $B=k[\xi,\zeta]/(\xi^3+1-\zeta^3)$ と同一視する．

a) C は特異点をもたないことを示せ．

b) $\Omega_{A/k}$ を A 上の微分形式のなす A-加群，$\Omega_{B/k}$ を B 上の微分形式のなす B-加群とする．$\Omega_{A/k}$，$\Omega_{B/k}$ それぞれの生成元を求めよ．

c) $U\cap V$ の正則関数環 $\mathrm{O}_C(U\cap V)$ を A を y で局所化した環 $A_y=k[x,y,y^{-1}]/(x^3+y^3-1)$ と同一視し，$\varphi : B\to A_y$ を $\xi\mapsto xy^{-1},\zeta\mapsto y^{-1}$ で定義される準同型とする． このとき，φ から誘導される準同型 $\Omega_{B/k}\to\Omega_{A_y/k}$ による $\Omega_{B/k}$ の生成元の像を求めよ．

d) $C=U\cup V$ で正則な微分形式全体のなす k-線形空間の基底を求めよ．また，C の（幾何）種数を求めよ．

$\boxed{2}$ $A=k[x,y]/(y^2-x^3-Ax-B)$ とする. ただし，基礎体 k は $\mathrm{char}(k)\neq 2,3$ と仮定する.

a) 多項式 P，$Q\in k[x]$ で

$$P(x)(x^3+Ax+B)+Q(x)(3x^2+A)=1$$

となるものが存在するためには $4A^3+27B^2\neq 0$ が必要十分であることを示せ.

b) $4A^3+27B^2\neq 0$ であるとする. 微分形式 $\omega\in\Omega_{A/k}$ を

$$\omega=P(x)\,y\,dx+2Q(x)\,dy$$

と定義する．ただし，P，Q は前問の関係式をみたす多項式とする. このとき，$y\omega=dx$ であることを示せ. また，$\Omega_{A/k}$ は ω で生成されることを示せ.

c) $A_y=k[x,y,y^{-1}]/(y^2-x^3-Ax-B)$ を A の y による局所かとする．$\omega\in\Omega_{A/k}$ を $\Omega_{A_y/k}$ に制限した微分形式は $\dfrac{dx}{y}$ に一致することを示せ.

d) ［任意］$4A^3+27B^2=0$ であれば $\Omega_{A/k}$ は自由 A-加群ではないことを示せ.