復習問題

1 $\mathbf{R}^4$ のベクトル $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4$ を

$$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -7 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_4 = \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \\ 9 \\ 8 \end{pmatrix}$$

とする．$\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4$ を並べてできる行列 A は行に関する基本変形によって下のように変形される．

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ -2 & -3 & 2 & -7 \\ 1 & 5 & -7 & 9 \\ 3 & 4 & -3 & 8 \end{pmatrix} \to \cdots \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a) $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4$ は一次独立かどうか判定せよ．もし，一次従属ならば，これらのベクトルの間の一次関係式を求めよ．

b) $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4$ で生成される部分空間 $\langle \vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4 \rangle$ の基底を（1 つ）求めよ．

c) 部分空間 $\langle \vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4 \rangle$ の次元をもとめよ．

2 $\mathbf{R}^4$ のベクトル $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4$ を

$$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 9 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 8 \\ 5 \end{pmatrix}$$

と定義し，A をこれらの列ベクトルを並べてできる 4 次の正方行列とする．すなわち

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 7 & 3 & 5 \\ 2 & 9 & 5 & 8 \\ 1 & 5 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

とする．さらに，f_A を $f_A(\vec{x}) = A\vec{x}$ で定義される $\mathbf{R}^4$ から $\mathbf{R}^4$ への線形写像とする．

a) 行列 A の階数を求めよ．

b) $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4$ は一次独立かどうかを判定せよ．一次従属であれば，これらのベクトルの間の一次関係式を求めよ．

c) $\vec{a}_4$ は $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ の一次結合として表わせる否かを判定せよ．

d) f_A の像 $\mathrm{Im}\, f_A$ および核 $\mathrm{Ker}\, f_A$ の基底をそれぞれ一つずつ求めよ．

3 $\mathbf{R}^4$ のベクトル

$$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ -7 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}$$

のうちで一次独立なものは最大何個あるか，理由を付して答よ．また（これらのベクトルからなる）その個数の一次独立なベクトルの組を一例挙げよ．

【裏につづく】

$\boxed{4}$ $A = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$ とする．A を対角化し，A^n を求めよ．

$\boxed{5}$ 次の行列を対角化せよ．

a) $\begin{pmatrix} -2 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & 2 \\ -4 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

$\boxed{6}$ 平面内の直線 $y = -\dfrac{1}{2}x$ に関する対称移動を表現する行列を求めよ．

$\boxed{7}$ p, q を $pq(p-q) \neq 0$ をみたす実定数とする．

a) 数列 $\{a_n\}$ が漸化式

$$a_{n+2} = (p+q)a_{n+1} - pqa_n, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

をみたすとき，ベクトルの列 $\vec{v}_n = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix}$ （$n = 1, 2, \ldots$）は

$$\vec{v}_{n+1} = A\vec{v}_n, \qquad A \text{ は } (2,2) \text{ 行列，} n = 1, 2, \ldots$$

の形の漸化式をみたす．$(2,2)$ 行列 A を求めよ．

b) A を対角化せよ．

c) A^n を求めよ．

d) a_n を a_1, a_2 と n を用いて表せ．

$\boxed{8}$ あるインターネット・サービスのマーケットには A 社，B 社，C 社の 3 社が参入している．A 社の契約者は 1 期後には，70 % が契約を継続するが，20 % は B 社に変更し，10 % は C 社に変更する．また，B 社の契約者は 1 期後には，80 % が B 社との契約を継続するが，10 % は A 社に変更し，10 % は C 社に変更する．さらに，C 社の契約者は 1 期後には，70 % が C 社との契約を継続するが，20 % は A 社に変更し，10 % は B 社に変更する．

a) 第 n 期後の A 社のシェアを a_n，B社のシェアを b_n，C 社のシェアを c_n としたとき．ある行列 M を用いて

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$$

と表せる．行列 M を求めよ．

b) このような動向が長期間にわたって続くとすると，各社のマーケットシェアは一定に近づく．シェアを表すベクトルは契約者の動向を表す行列 M の固有値 1 の固有ベクトルとなることを利用し，各社のシェアを求めよ．