「復習問題」略解

（1 月 5 日訂正版）

1 a) $c_1\vec{a}_1 + c_2\vec{a}_2 + c_3\vec{a}_3 + c_4\vec{a}_4 = \vec{0}$ の解を求めてみる．基本変形された行列を見て，$c_4 = t$ とおくと，$c_1 = 2t, c_2 = -5t, c_3 = -2t, c_4 = t$（$t$ は任意の実数）という $(c_1, c_2, c_3, c_4) \neq (0,0,0,0)$ である解を得る．したがって，$\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4$ は 1 次従属であり，$t = 1$ とおいて，$2\vec{a}_1 - 5\vec{a}_2 - 2\vec{a}_3 + \vec{a}_4 = \vec{0}$ という 1 次関係式を得る．

b) a) で求めた 1 次関係式より，$\vec{a}_4 = -2\vec{a}_1 + 5\vec{a}_2 + 2\vec{a}_3$ と表せることがわかるので，$\langle \vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4 \rangle$ は $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ で生成されることがわかる．すなわち，$\langle \vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4 \rangle = \langle \vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3 \rangle$ である．一方，行列 A の基本変形の最初の 3 列部分だけを見れば，$\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ が 1 次独立であることもわかる．したがって，$\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ が $\langle \vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4 \rangle$ の基底の 1 つであることがわかる．

c) b) で見たように $\langle \vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4 \rangle$ の基底は 3 つのベクトルからなるので，次元は 3.

お詫び 行列 A の $(1,3)$ 成分が -2 であるべきところが -1 となっていました．申し訳ありませんでした．なお，変形後の行列はこの通りです．

2 a) 変形されてできる階段行列は $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ これより，A の階数は 3 とわかる．

b) $c_1\vec{a}_1 + c_2\vec{a}_2 + c_3\vec{a}_3 + c_4\vec{a}_4 = \vec{0}$ の解を求めると，a) で求めた階段行列を参照して $c_1 = 2t, c_2 = -t, c_3 = t, c_4 = 0$（$t$ は任意の実数）という解を得る．したがって，$\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4$ は 1 次従属であり，$t = 1$ として，$2\vec{a}_1 - \vec{a}_2 + \vec{a}_3 = \vec{0}$ という 1 次関係式を得る．

c) $\vec{a}_4 = d_1\vec{a}_1 + d_2\vec{a}_2 + d_3\vec{a}_3$ と表せたとすると，$\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4$ の間に，$d_1\vec{a}_1 + d_2\vec{a}_2 + d_3\vec{a}_3 - \vec{a}_4 = \vec{0}$ という 1 次関係式が成り立つことになる．しかし，a) で得られた行列をみると，このような形の 1 次関係式はないことがわかる．しがたって，$\vec{a}_4$ は $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ の 1 次結合で表すことはできない．

d) f_A の像とは $\langle \vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4 \rangle$ に他ならない．そこで，問題 1 と同じようにして，$\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_4$ が $\mathrm{Im}\, f_A$ の基底であることがわかる．また，f_A の核とは　$A\vec{x} = \vec{0}$ の解の集合に他ならない．a) の結果より，この解は $\vec{x} = t\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$（$t$ は任意の実数）と書ける．したがって，$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ が核 $\mathrm{Ker}\, f_A$ の基底となる．

3 $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4, \vec{a}_5$ を並べてできる行列 $\begin{pmatrix} 1 & 6 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & -4 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & -7 & 1 & 5 \\ -1 & 4 & 7 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ を基本変形によって階段行列に変形すると，（計算は少々複雑で，手計算でやる場合は工夫が必要だが）$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ となる．この行列の階数は 4 なので，$\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4, \vec{a}_5$ のうち，1 次独立なものの最大個数は 4．基本変形の結果から，問題 1 と同様にして，$3\vec{a}_1 - \vec{a}_2 + \vec{a}_3 = \vec{0}$ が得られ，これより，$\vec{a}_3 = -2\vec{a}_1 + \vec{a}_2$ となる．$\vec{a}_3$ を除いた，$\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_4, \vec{a}_5$ は 1 次独立なベクトルの組となる．

4 $P = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ とおくと，

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$A^n = P\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}^n P^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3^n & 0 \\ 0 & 5^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2\cdot 3^n - 5^n & 2\cdot 3^n - 2\cdot 5^n \\ -3^n + 5^n & -3^n + 2\cdot 5^n \end{pmatrix}$$

5 a) $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ とおくと，$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

b) これは，対角化不可能な行列でした．この問題は今回の試験の範囲外です．昨年の問題のミスを修正するのを忘れていました．ごめんなさい．

6 $y = -\frac{1}{2}x$ と平行なベクトル $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ はこの対称移動で不変であり，$y = -\frac{1}{2}x$ と垂直なベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ は $-\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ に移る．そこで，$P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ とおき，求める行列を A とおくと $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ となる．ゆえに，

$$A = P\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}$$

7 a) $A = \begin{pmatrix} p+q & -pq \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

b) $P = \begin{pmatrix} p & q \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ とおくと，

$$P^{-1}AP = \frac{1}{p-q}\begin{pmatrix} 1 & -q \\ -1 & p \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p+q & -pq \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p & q \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix}$$

c) $A^n = P\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix}^n P^{-1} = \begin{pmatrix} p & q \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p^n & 0 \\ 0 & q^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p & q \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$

$$= \frac{1}{p-q}\begin{pmatrix} p^{n+1}-q^{n+1} & -pq(p^n-q^n) \\ p^n-q^n & -pq(p^{n-1}-q^{n-1}) \end{pmatrix}$$

d) $\vec{v}_n = A^{n-1}\vec{v}_1$ の第 2 成分をみて

$$a_n = \frac{1}{p-q}\left(-pq(p^{n-2}-q^{n-2})\,a_1 + (p^{n-1}-q^{n-1})\,a_2\right)$$

$\boxed{8}$ a) $M = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.1 & 0.2 \\ 0.2 & 0.8 & 0.1 \\ 0.1 & 0.1 & 0.7 \end{pmatrix}$

b) 固有値 1 の固有ベクトルを求めると $t\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}$ となる．各社のシェアは 5 : 7 : 4 となる．

すなわち，約 31%, 44%, 25% の割合となる．