

応用問題

[1] 衛星放送のマーケットには V 社と W 社の 2 社がある. V 社の契約者は 1 期後には, 60% が契約を継続するが, 40% は W 社に変更する. また, W 社の契約者は 1 期後には, 80% が W 社との契約を継続するが, 20% は V 社に変更する. このとき次の問に答えよ.

- a) 第 n 期の V 社のシェアを v_n , W 社のシェアを w_n とする. このとき, ベクトル $\begin{pmatrix} v_{n+1} \\ w_{n+1} \end{pmatrix}$ はある行列 M とベクトル $\begin{pmatrix} v_n \\ w_n \end{pmatrix}$ を用いて $\begin{pmatrix} v_{n+1} \\ w_{n+1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} v_n \\ w_n \end{pmatrix}$ と表わされる. 行列 M をもつめよ.
- b) 上で求めた行列 M の固有値と固有ベクトルを求めよ.
- c) 行列 M を対角化せよ.
- d) M^n を求めよ.
- e) $\lim_{n \rightarrow \infty} M^n$ を求めよ. それを用いて, 第 1 期のマーケットシェアがどうであれ長期的にはシェアはある一定の割合に近づくことを示せ.

[2] p, q は $0 \leq p \leq 1, 0 \leq q \leq 1$ みたす実数とし, $M = \begin{pmatrix} 1-p & q \\ p & 1-q \end{pmatrix}$ とおく. M は固有値 1 を持つことを示せ. また, 固有値 1 に対する固有ベクトルを求めよ.

[3] あるインターネット・サービスのマーケットには A 社, B 社, C 社の 3 社が参入している. A 社の契約者は 1 期後には, 70% が契約を継続するが, 20% は B 社に変更し, 10% は C 社に変更する. また, B 社の契約者は 1 期後には, 80% が B 社との契約を継続するが, 10% は A 社に変更し, 10% は C 社に変更する. さらに, C 社の契約者は 1 期後には, 70% が C 社との契約を継続するが, 20% は A 社に変更し, 10% は B 社に変更する.

- a) 第 n 期後の A 社のシェアを a_n , B 社のシェアを b_n , C 社のシェアを c_n としたとき, ある行列 M を用いて

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$$

と表せる. 行列 M を求めよ.

- b) このような動向が長期間にわたって続くとすると, 各社のマーケットシェアは一定に近づく. シェアを表すベクトルは契約者の動向を表す行列 M の固有値 1 の固有ベクトルとなることを利用し, 各社のシェアを求めよ.

[4] あるレンタカーの会社には, 3 つの営業所, 東, 西, 南がある. 客はどの営業所で車を借りることもできるし, どの営業所に戻してもよい. 調査によると東営業所で借りた客の 8 割が東営業所に戻し, 1 割ずつが西と南営業所に戻すという. 西営業所で借りた客はそれぞれ, 3 割, 2 割, 5 割の割合で, 東, 西, 南営業所に戻す. また, 南営業所で借りた客はそれぞれ, 2 割, 6 割, 2 割の割合で, 東, 西, 南営業所に戻すという. このような状況が続くとした場合, レンタカーの配車を 3 つの営業所にどのような割合ですればよいか.

5] ある都市圏で、郊外人口を x 万人、都市人口を y 万人としたとき、10年後の郊外人口 x' 万人、都市人口 y' 万人の間に次の関係が成り立つとする。

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.4 \\ 0.4 & 1.3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

- $A = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.4 \\ 0.4 & 1.3 \end{pmatrix}$ とするとき、 A の固有値と固有ベクトルを求めよ。
- A を対角化せよ。
- A^n を求めよ。
- 上の関係式が長期間にわたって成り立つとすると、数十年後、郊外人口と都市人口との比率がほぼ一定に近づく。そのときの郊外人口と都市人口との比率はどれくらいになるか。また、そのときの都市圏全体の人口の増加率はおおよそどのくらいか。

6] In the Land of Oz they never have two nice days in a row. If they have a nice day, they are just as likely to have snow as rain the next day. If they have snow (or rain), they have an even chance of having the same the next day. If there is a change from snow or rain, only half of the time is this a change to a nice day.

- Find the probability that the third day is a nice day, knowing that it was sunny on the first day.
- More generally, find the probability that the n th day is a nice day, knowing that it was fine on the first day.
- Generally speaking, what is the probability to have a nice day in the land of Oz?

7] A country is divided into three demographic regions. It is found that each year 5% of the residents of region 1 move to region 2, and 5% move to region 3. Of the residents of region 2, 15% move to region 1 and 10% move to region 3. And of the residents of region 3, 10% move to region 1 and 5% move to region 2. What percentage of the population resides in each of the three regions after a long period of time?