

1 市場を占有している N と S という二つの銘柄の酒がある. 消費者は月 1 本酒を買うが, ある月に銘柄 N を買うと次の月も銘柄 N を買う確率は 80%, 銘柄 S を買う確率は 20% である. また銘柄 S を買うと次の月も銘柄 S を買う確率は 70%, 銘柄 N を買う確率は 30% である. このとき次の問に答えよ.

- a) 第 n 期の銘柄 N のシェアを a_n , 銘柄 S のシェアを b_n とする. このとき, ベクトル $\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix}$ はある行列 M とベクトル $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$ を用いて $\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$ と表わされる. 行列 M をもとめよ.
- b) 上で求めた行列 M の固有値と固有ベクトルを求めよ.
- c) 行列 M を対角化せよ.
- d) M^n を求めよ.
- e) $\lim_{n \rightarrow \infty} M^n$ を求めよ.
- f) 長期的には, 銘柄 N と S のシェアはある一定の割合に近づくことを示し, それぞれのシェアを求めよ.

2] On planet Xsldkfjs, there are two primitive life forms, the Fleoifkjs and the Wowopfkjs. The Fleoifkjs reproduce wildly, while the Wowopfkjs are essentially parasites on the Fleoifkjs, needing their bodies to reproduce and then killing the host Fleoifkjs. If we let f_k and w_k be the number of Fleoifkjs and Wowopfkjs at the end of year k , respectively. Then their populations are governed by the rule

$$\begin{pmatrix} f_{k+1} \\ w_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{13}{8} & -\frac{3}{8} \\ \frac{3}{8} & \frac{3}{8} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_k \\ w_k \end{pmatrix}.$$

- a) Show that in the long term, both populations are growing. Determine the growth rate and the eventual ratio of Fleoifkjs to Wowopfkjs. (*Note*: You do not need a calculator to do this problem)
- b) If there are few Fleoifkjs and too many of the parasitic Wowopfkjs around initially, both populations will perish. Find this critical ratio of Fleoifkjs to Wowopfkjs below which both populations are doomed to oblivion.