$\boxed{1}$ 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & -2 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ とし，行列 A を用いて $\vec{x} \mapsto A\vec{x}$ で定義される線形変換を f_A とする．このとき，1 次同次方程式 $A\vec{x} = \vec{0}$ の解全体の集合

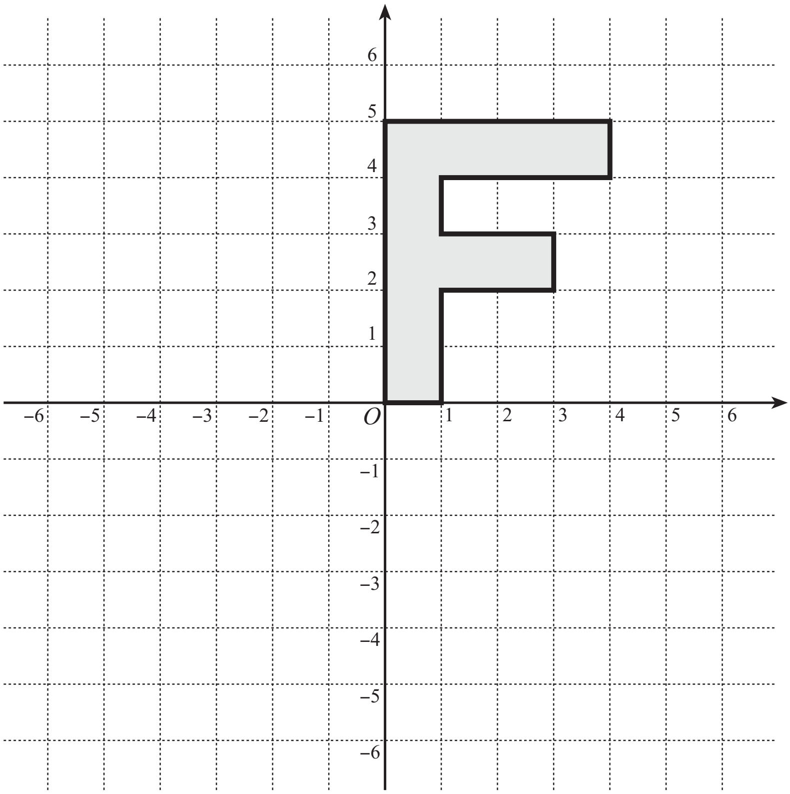
$$V = \{\vec{x} \in \mathbf{R}^3 \mid A\vec{x} = \vec{0}\}$$

は $\mathbf{R}^3$ の部分空間であることはすでに示した．この部分空間を線形変換 f_A の**核** といい，Ker f_A で表す．Ker f_A の基底を求めよ．

学生証番号 : ____________________　氏名 : ___________________________

$\boxed{2}$ $A = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{4}{5} \\ -\frac{3}{10} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$ とし，行列 A により定義される 1 次変換を f_A とする.

a) f_A によって「F」の文字がどのように変換されるか？　「F」の各頂点の移る点を図示せよ.



b) f_A の像 Im f_A と核　Ker f_A の基底をそれぞれ求めよ.

$\boxed{3}$ $\mathbf{R}^4$ のベクトル $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4$ を

$$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

と定義し，$A = (\vec{a}_1 \mid \vec{a}_2 \mid \vec{a}_3 \mid \vec{a}_4)$ をこれらの列ベクトルを並べてできる 4 次の正方行列とする．また，f_A を $f_A(\vec{x}) = A\vec{x}$ で定義される $\mathbf{R}^4$ から $\mathbf{R}^4$ への線形写像とする．このとき，以下の問いに答えよ．

a) 行列 A の階数を求めよ．

b) $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4$ は一次独立かどうかを判定せよ．一次従属であれば，これらのベクトルの間の一次関係式を求めよ．

c) $\vec{a}_1$ は $\vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4$ の一次結合として表わせる否かを判定せよ．

d) f_A の像 $\mathrm{Im}\, f_A$ および核 $\mathrm{Ker}\, f_A$ の基底をそれぞれ一組ずつ求めよ．

2011 年 10 月 27 日