1 次の 5 つの 4 次元ベクトルで生成される部分空間 $\langle \vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4, \vec{a}_5 \rangle$ の基底と次元を求めよ.

$$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ -7 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}$$

学生証番号 : ____________________　　氏名 : ___________________________

$\boxed{2}$ 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & -2 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ を用いて $\vec{x} \mapsto A\vec{x}$ で定義される線形変換を f_A とする.

a) ベクトル $\vec{b} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ が f_A の像 $\mathrm{Im}\, f_A$ に入るための a, b, c の必要十分条件を連立 1 次方程式 $\begin{cases} x - y - 2z = a \\ -x - 2y - z = b \\ -2x - y + z = c \end{cases}$ を解くことにより求めよ.

b) a) の結果を用いて像 $\mathrm{Im}\, f_A$ の基底を求めよ.

c) $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\vec{a}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{a}_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ とおく．行列 A はこれらのベクトルを並べてできた行列である．このとき，f_A の像 $\mathrm{Im}\, f_A$ は部分空間 $\langle \vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3 \rangle$ に一致することを用いて，$\mathrm{Im}\, f_A$ の基底を求めよ．